Lineare algebraische Gruppen (Anhänge)

Vorlesung 2019 - 2020
Fakultät für Mathematik, Universität Leipzig
frei nach
T.A.Springer: Linear algebraic groups
Birkhäuser, Boston 1981
(zweite Auflage 1998)

Bezeichnungen

Ab	Kategorie der abelschen Gruppen und Gruppen-Homomorphismen.
Ab'	Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppe ohne p-Torsion, wobei p die Charakteristik des Grundkörpers k bezeichne, vgl. 3.2.10 Aufgabe 1.
$\mathcal{A}$(G)	k-Vektorraum der additiven Funktionen auf der linearen algebraischen Gruppe G, vgl. Bemerkung 3.3.1 (i) und 14.3.1.
$\mathcal{A}$(G)[F]	F-Vektorraum der über dem Teilkörper F $\subseteq$ k definierten additiven Funktionen auf der linearen algebraischen F-Gruppe G, vgl. Bemerkung 3.3.1 (ii) und 14.3.1.
$\mathbb{A}^n$	affiner n-dimensionaler Raum, vgl. 1.4.3 oder A.5.2.1 (a).
a(χ)	die Einheit der Algebra $\mathcal{A}$ von 2.5.4 zum Charakter χ einer linearen algebraischen Gruppe, vgl. 2.5.6.
Ad	die Darstellung $G \longrightarrow Aut_k(T_eG)$ einer linearen algebraischen Gruppe G, welche induziert wird durch die Operation von G auf sich selbst durch innere Automorphismen, vgl. 4.4.1B und 4.4.5(ii).
Ad*	die Darstellung $G \longrightarrow Aut_k((T_eG)^*)$ einer linearen algebraischen Gruppe G, welche induziert wird durch Ad, vgl. Bemerkung 4.4.1 B (i).
α_G	der Auswertungsisomorphismus $L(G) \longrightarrow T_eG$, $D \mapsto D_e$, welcher die Lie-Algebra der linearen algebraischen Gruppe G mit deren Tangentialraum im neutralen Element identifiziert, vgl. 4.4.5 (i).
α'_G	die Abbildung $\mathcal{D}_G \longrightarrow T_eG$, $D \mapsto D_e$, welche die regulären Vektorfelder auf der linearen algebraischen Gruppe G auf deren Wert im neutralen Element abbildet, vgl. 4.4.5.
c(M)	Anzahl der Spalten einer Matrix ("columns"), vgl. A.3.1.1.
c(X)	Vektor der Chow-Koordinaten der projektiven Varietät $X\subseteq\mathbb{P}^N$, vgl. 5.7.2 und 5.7.5.
Char(k)	Charakteristik des Körpers k, vgl. 1.2.5
D(f)	offene Hauptmenge zur Funktion f, vgl. 1.3.5.
$\mathbf{D}_n$	Gruppe der nicht-singulären Diagonal-Matrizen, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (b).
$\mathbf{D}_n$(F)	die Menge der n×n-Diagonalmatrizen mit Einträgen aus dem Körper F, vgl. 2.4.2 B.
φ_v	der Isomorphismus zur Basis v eines k-Vektorraums, der diesem mit einem k^n identifiziert, vgl. den Beweis zur Bemerkung 4.4.14A(i).
φ_v	die Auswertung an der Stelle v einer linearen Abbildung im Vektor v ihres Definitionsbereichs, vgl. den ersten Schritt im Beweis von 4.4.14A(ii).
$d\phi_x$	Differential der regulären Abbildung ϕ im Punkt x des Definitionsbereichts, vgl. 4.1.3 und 4.1.7.

$d\phi_x(F)$ die vom Differential $d\phi_x$ induzierte F-lineare Abbildung auf den F-rationalen Punkten des Tangentialraums, vgl. 4.1.8.

$d_{A/R}$ das natürliche Differential auf der Algebra A über dem Ring R, vgl. 4.2.1.

$\mathcal{D}_G$ die Lie-Algebra $Der_k(k[G], k[G])$ der k-Derivationen des Koordinatenrings k[G] der linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 4.4.3 I.

$\mathcal{D}_G(F)$ die F-Struktur $Der_F(F[G], F[G])$ der Lie-Algebra $\mathcal{D}_G$ der linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 4.4.4 (iii).

Def(f) Definitionsbereich der rationalen Funktion f, vgl. Bemerkung A.5.4.3 (iv).

$Der_R(A,M)$ der Modul der Derivationen der Algebra A über dem kommutativen Ring R mit 1, welche Werte im R-Modul M annehemen, vgl. 4.1.1.

Diag Kategorie der diagonalisierbaren linearen algebraischen Gruppe, vlg. 3.2.10 Aufgabe 1.

$\dim_K M$ Dimension des Vektorraums M über dem Schiefkörper K, vgl. Bemerkung A.3.1.2 (iii).

dim X Dimension der algebraischen Varietät X, vgl. 1.8.1.3.

$\dim_x X$ lokale Dimension der algebraischen Varietät X im Punkt $x \in X$, vgl. 4.1.7.

Δ gewöhnlich die Komultiplikation $k[G] \longrightarrow k[G] \otimes k[G]$ einer linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 2.1.2.

e gewöhnlich die Einsabbildung $G \longrightarrow G$ einer algebraischen Gruppe G, vgl. vgl. Bemerkung 2.1.1.1 (vi), manchmal auch die Auswertungsabbildung im Einselement $k[G] \longrightarrow k$, $f \mapsto f(e)$, d.h. das als k-rationaler Punkt aufgefaßte neutrale Element der Gruppe, vgl. 2.1.2.

$e_{V\otimes V^\vee}$ die kanonische Basis des 1-dimensionalen Moduls über der linearen algebraischen Gruppe G, vgl. Bemerkung 2.5.6 (ii).

ε gewöhnlich der von der Einsabbilung e induzierte k-Algebra-Homomorphismus $k[G] \longrightarrow k[G]$ einer linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 2.1.2.

$End_k(V)$ der k-linearen Endomorphismus $V \longrightarrow V$ des endlich-dimensionalen k-Vektorraums V, vgl. 2.4.1. Dieselbe Bezeichnung wird auch verwendet im Fall einer unendlichen Dimension von V , vgl. 2.4.7.

End(V) := $End_k(V)$, vgl. 2.4.1.

F Teilkörper von k, vgl. 1.3.7.

F[X] F-Struktur der algebraischen Menge X, vgl. 1.3.7

G^0 Komponente der Eins der algebraischen Gruppe G, vgl. 2.2.1.2.

$\mathbb{G}(\ell, n)$ Graßmann-Varietät der ℓ-dimensionalen linearen Unterräume des k^n, vgl. 5.6.4 (b).

$\mathbf{G}_a$ additive Gruppe, vgl. 2.1.4, Beispiel 1.

$\mathbf{G}_m$ multiplikative Gruppe, vgl. 2.1.4, Beispiel 2.

$\mathbf{GL}_1$ multiplikative Gruppe, vgl. 2.1.4, Beispiel 2.

$\mathbf{GL}_n$ allgemeine lineare Gruppe, vgl. 2.1.4, Beispiel 3.

$\mathbf{GL}(V)$ allgemeine lineare Gruppe des endlich-dimensionalen k-Vektorraums V, Gruppe der linearen Automorophismen von V, vgl. 2.1.5 Aufgabe 1. Dieselbe Bezeichnung wird auch verwendet im Fall einer unendlichen Dimension von V , vgl. 2.4.7.w

$\mathbf{GL}_m(R)$	Gruppe der umkehrbaren m×m-Matrizen mit Einträgen aus dem kommutativen Ring R mit 1, deren Inverse ebenfalls Einträge aus R besitzen, vgl. 4.2.13 B.
$\mathbf{gl}(V)$	Lie-Algebra der linearen Endomorphismen des endlich-dimensionalen Vektorraums V über einem Körper, vgl. 4.4.3C.
$\mathbf{gl}(n,F)$	$= \mathbf{gl}(F^n)$, Lie-Algebra der linearen Endomorphismen des endlich-dimensionalen Vektorraums F^n über dem Körper F, vgl. 4.4.3C.
$\mathbf{gl}(V)$	Lie-Algebra der k-linearen Endomorphismen des endlich-dimensionalen k-Vektorraums V, vgl. 4.4.14.
$\mathbf{gl}_n$	die Lie-Algebra der n×n-Matrizen mit Einträgen aus k, vgl. 4.4.10
I	der triviale Modul über einer algebraischen Gruppe, vgl. 2.5.1.
I(X)	Ideal der Polynome von k[T], welche in allen Punkten der Menge $X \subseteq k^n$ gleich Null sind, vgl. 1.1.1
$I_X(Y)$	Ideal der Funktionen aus dem Koordinatenring der algebraischen Menge X, welche auf der Teilmenge $Y \subseteq X$ identisch Null sind, vgl. 1.3.2.
i	gewöhnlich die Invertierungsabbildung $G \longrightarrow G$ einer algebraischen Gruppe G, vgl. 2.1.1.1.
ι	gewöhnlich der Antipode $k[G] \longrightarrow k[G]$ einer linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 2.1.2.
Int(g)	der durch das Gruppen-Element g definierte innere Automorphismus $x \mapsto gxg^{-1}$ der Gruppe, vgl. 4.4.1 B.
k	algebraisch abgeschlossener Körper, vgl. 1.1.1.
k[T]	Polynomring über k in den Unbestimmten $T = T_1,...,T_n$, vgl. 1.1.1
k[X]	affiner Koordinatenring der algebraischen Menge X, vgl. 1.3.1
k(X)	rationaler Funktionenkörper der irreduziblen Varietät X, vgl. 1.8.1.1 und1.8.1.2.
k_x	der k[X]-Modul im Punkt $x \in X$ der algebraischen Menge, vgl. 4.1.2 B oder 4.1.3.
$k[\tau]$	k-Algebra der Dualzahlen, vgl. 4.1.9 Aufgabe 3.
L(G)	Lie-Algebra der linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 4.4.3 I.
$L(\phi)$	der durch den Homomorphismus ϕ: $G \longrightarrow G'$ von linearen algebraischen Gruppen auf den Lie-Algebren induzierte Lie-Algebra-Homomorphismus, vgl. 4.4.8 (ii) und 4.4.9.
L_g	Linkstranslation einer Gruppe mit dem Gruppen-Element g, vgl. 2.2.0 und 2.3.2 Beispiel 2.
λ	Darstellung einer linearen algebraischen Gruppe im Koordionatenring durch Linkstranslationen, vgl. 2.3.6 I.
$\mathbf{M}_n = k^{n\times n}$	Menge der n×n-Matrizen, vgl. 2.1.4 Beispiel 3.
$\mathbf{M}_n(F)$	Menge der n×n-Matrizen mit Einträgen aus dem Körper F, vgl. 2.4.2 B.
$\mathbf{M}_{m,n}(R)$	Menge der m×n-Matrizen mit Einträgen aus dem kommutativen Ring R mit 1, vgl 4.2.13.B.
M_x	das maximale Ideal der Funktionen des Koordinatenrings einer algebraischen Menge, welche im Punkt x gleich Null sind, vgl. 1.3.2.
$\mathcal{M}(A)$	Kokern der Multiplikation mit der Matrix A, vgl. 4.2.13 A.

$M^{v'}_{v''}(\varphi)$	Matrix der linearen Abbildung φ bezüglich der geordneten Basen v' und v" von Urbild bzw. Bildraum, vgl. Bemerkung A.3.1.2 (v).
$Mat_{m,n}(K)$	Modul der m×n-Matrizen mit Einträgen aus dem Ring K, vgl. Bemerkung A.3.1.1 (ii).
$Mat_n(K)$	Modul der n×n-Matrizen mit Einträgen aus dem Ring K, vgl. Bemerkung A.3.1.1 (iii).
μ	gewöhnlich die Multiplikationsabbildung $G\times G \longrightarrow G$ einer algebraischen Gruppe G, vgl. 2.1.1.1.
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (≥ 1) ohne die Null.
$\mathbf{N}$	$= \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen.
$\nu_{n,m}$	$= \binom{n+m}{m}$, die Dimension der affinen Kegels über dem Bild-Raum der m-Veronese-Abbildung des $\mathbb{P}^n$, vgl. 5.4.4 (b).
$\mathbf{O}_n$	die orthogonale Gruppe, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (f).
$\mathcal{O}_X$	Garbe der regulären Funktionen auf der algebraischen Menge X, vgl. 1.4.1.
$\mathcal{O}_X\|_Y$	Einschränkung der Garbe $\mathcal{O}_X$ auf den Unterraum Y von X, vgl. 1.4.2
$\mathcal{O}_{X,x}$	lokaler Ring der algebraischen Menge X im Punkt $x\in X$, vgl. 1.4.3.
p	Charakteristik des Grundkörpers k, vgl. 3.2.10.
$\prod$	die Plücker-Varietät im $\mathbb{P}^5$, vgl. Bemerkung 5.6.4 (c) (iv).
Q(R)	voller Quotientenring des Rings R, Quotientenkörper des Integritätsbereichs R, vgl. 1.4.4.
r_V	die rationale Darstellung $G \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$ des Moduls V über einer algebraischen Gruppe G, vgl. Beispiel 3 von 2.3.2 und 2.5.1.
R_g	Rechtstranslation einer Gruppe mit dem Gruppen-Element g, vgl. 2.2.0 und 2.3.2 Beispiel 2.
R(F)	der Polynomring F[T] in einer Unbestimmten T mit einer durch die Frobenius-Abbildung verdrehten Multiplikation, vgl. 3.1.1 B.
r(M)	Anzahl der Zeilen einer Matrix ("rows"), vgl. A.3.1.1.
rk(A)	Rang der Matrix A, vgl. 4.2.13 B.
ρ	Darstellung einer linearen algebraischen Gruppe im Koordionatenring durch Rechtstranslationen, vgl. 2.3.6 B.
s	der Gruppen-Homomorphismus $G \longrightarrow GL(k[X])$ zu einer Operation der linearen algebraischen Gruppe G auf einer affinen Varietät X, vgl. 2.3.5.
Specm(A)	maximales Spektrum der affinen k-Algebra A, vgl. 1.3.2.
$\mathbf{SL}_n$	die spezielle lineare Gruppe, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (e).
$\mathbf{SO}_n$	die spezielle orthogonale Gruppe, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (g).
$\mathbf{Sp}_{2n}$	die symplektische Gruppe, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (h).
σ	der Frobenius-Morphismus einer affinen Varietät, vgl. 4.4.16.
$\mathbf{T}_n$	Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (c).
$\mathbf{T}_n(F)$	die Menge der oberen n×n-Dreiecksmarrizen mit Eintragen aus dem Körper F, vgl. 2.4.2 B.
$T_A(M)$	Tensoralgebra des A-Moduls M, vgl. A.2.2.

$T_x X$	Tangentialraum der Varietät X im Punkt $x \in X$, vgl. 4.1.3 und 4.1.7.
$T_x X(F)$	Raum der F-rationalen Punkte des Tangentialraums $T_x X$, vgl. 4.1.8.
$\mathrm{trdeg}_F E$	Transzendenzgrad der Körpererweiterung E/F, vgl. 4.4.9 A.
type(M)	Typ einer einer Matrix M, vgl. A.3.1.1.
$\mathbf{U}_n$	Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen, vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (d).
V(M)	Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome aus der Menge M, vlg. 1.1.1.
$V_X(I)$	Menge der gemeinsamen Nullstellen der Funktionen des Ideals I des Koordinatenrings der algebraischen Menge X, vgl. 1.3.2.
$\mathbf{X}(G)$	die Charaktergruppe der linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 2.5.6.
$\mathbf{X}^*(G)$	die Charaktergruppe der linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 3.2.1.
$\mathbf{X}_*(G)$	die Menge der einparametrischen Untergruppen der linearen algebraischen Gruppe G, vgl. 3.2.1.
$\Omega_{A/R}$	Modul der Differentiale der Algbra A über dem Ring R, vgl. 4.2.1.
Ω_X	$:= \Omega_{\underline{k[X]/k}}$ Modul der Kähler-Differentiale der affinen algebraischen Varietäte X, vgl. 4.3.3 A.
$E^{1/p}$	der Körper der p-ten Wurzeln des Körpers E der Charakteristik $p \neq 0$, vgl. Bemerkung 4.2.10 A (iii).
$\sqrt{I}$	Nil-Radikal des Ideals I, vgl. 1.1.1.
(H, K)	Kommutator-Gruppe der Untergruppen H und K einer Gruppe, vgl. Bemerkung 2.1.1.1 (vii).
(f,g)	Morphismus mit Werten in einem Produkt von Varietäten mit den Koordinaten-Morphismen f und g, vgl. 1.5.1.
(x,y)	Kommutator zweier Elemente einer Gruppe, vgl. Bemerkung 2.1.1.1(vii) und 2.4.13.
(m,n)	der Binomialkoeffizient $\binom{m}{n}$ bzw. Null im Fall $m < n$, vgl. Bemerkung 3.4.1 (iii).
$n \le_p m$	für den Koeffizienten n_i und m_i der p-adischen Entwicklungen von n und m gelte $n_i \le m_i$ für alle i, vgl. Bemerkung 3.4.1 (ii).
< , >	Die kanonische Paarung $X \times Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ eines Torus , vgl. 3.2.11 A.
[f]	Keim der regulären Funktion, vgl. 1.4.3
$[x]=[x_0,\ldots,x_n]$	Punkt mit den projektiven Koordinaten x_i, vlg. 1.7.1
$\mathbf{g}, \mathbf{h}, \ldots$	die Lie-Algebra der linearen algebraischen Gruppe G, H, ...,vgl. 4.4.8
$\lvert i \rvert$	Summe der Koordinaten des Tupels i (wenn i als Exponent eines Monoms in Multi-Index-Schreibweise vorkommmt), vgl. 1.7.3.
A_f	Quotientenring des Rings A bezüglich der Potenzen des Elements $f \in A$, vgl. 1.4.6.
f^*	der auf den Schnitten (insbesondere den globalen Schnitten) der Strukturgarbe induzierte k-Algbra-Homomorphismus zum Morphismus f geometrischer Räume, vgl. 1.4.7.
$f^\#$	der durch den k-Algebra-Homomorphismus f induzierte Morphismus affiner k-Varieäten, vgl. Bemerkung 1.4.7 (v).
$R^{m\times n}$	Menge der $m\times n$-Matrizen mit Einträgen aus dem kommutativen Ring R mit 1, vgl 4.2.13.B.

R^{op} der zum Ring R entgegengesetzte Ring, vgl. Anfang des Beweises von 3.3.3 (iii).
$V^{\vee}$ der zum Vektorraum V duale Vektorraum, vgl. 2.5.1.
X(F) Menge der F-rationalen Punkte der algebraischen Menge X, vgl. 1.3.7.
$x^* = (x_0,...,x_n)^*$ Punkt mit den projektiven Koordinaten x_i, vlg. 1.7.1

Literatur

Azad, H.
[1] Structure constants of algebraic groups, Journal of Algebra 75 (1982),209-222.
Borel, A.
[1] Groups linéaires algébriques, Annals of Mathematics 64 (1956), 20-82
[2] Algebraic groups and related finite groups, Lecture Notes in Math. 131, 2. Aufl., Springer-Verlag 1986
[3] Linear algebraic groups, 2. Aufl., Graduate Texts in Math. 126, Springer-Verlag 1991.
Borel, A., Springer, T.A.
[1] Rationality properties of linear algebraic groups, Tôhoku Math. Journal 20 (1968), 443-497
Borel, A., Tits, J.
[1] Groupes réductifs, Publ. Math. IHES 27 (1965), 55-150; Complements, ibid. 41 (1972), 253-276
[2] Eléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs, Inventiones Mathematicae 12 (1971), 95-104
[3] Théoremes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 287 (1978), 55-57.
Bourbaki, N.
[1] Algèbre commutative, Hermann, Paris 1961-1965
[2] Groups et algèbres de Lie, Hermann, Paris 1971-1975
[3] Algèbre, Ch. IV-VII, Masson, Paris 1981.
Brown, K.S.
[1] Cohomology of groups, Springer, New York•Heidelberg•Berlin 1982.
Bruhat, F.
[1] Représentations induites des groupes de Lie semi-simples connexes, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 138 (1954), 437-439.
Bruhat, F., Tits, J.
[1] Groupes réductifs sur un corps local, Ch. I, Publ. Math. IHES 41 (1972),5-251, Ch. II, ibid. 60 (1984), Ch. III, Journal Fac. Science University Tokyo 34 (1987), 671-698.
Bucur, I., Deleanu, A.
[1] Introduction to the theory of categories and functors, Wiley-Interscience Publication, London, New York, Sydney 1968
Carter, R.W.
[1] Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex representations, Wiley, 1985
Cartier, P.
[1] Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique, Bulletin Société Math. de France 86 (1958), 177-251.
Cassels, J.W.S., Fröhlich, A.
[1] Algebraic number theory, Academic Press, London•New York 1967.
Cernousov, V.I.
[1] The Hasse principle for groups of type E_8, Math. USSR Izv. 34 (1990), 409-423.
Chevalley, C.

[1] Théorie des groupes de Lie, vol. II, Groupes algébriques, Hermann, 1951.
[2] On algebraic group varieties, Journal Math. Soc. Japan 6 (1954), 303-324.
[3] Fondements de la géométrie algébrique, Paris, 1958.
[4] Classification des groupes de Lie algébriques, Séminaire Ecole Normale Supérieure, Paris, 1956-1968.
[5] Certain schémas de groupes semi-simples, Séminaire Bourbaki, exp. 219, Paris, 1960-1961.

Conrad, B.
[1] A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups, Journal of the Ramanujan Math. Soc. 17:1 (2002),1-18

Curtis, C.W.
[1] Central extensions of groups of Lie type, Journal f. reine u. angewandte Mathematik 220 (1965), 174-185.

Deligne, P.
[1] Catégories Tannakiennes, in: P. Cartier et al., The Grothendieck Festschrift, Band II, Birkäuser 1990, 111-195.

Deligne, P., Lusztig, G.
[1] Representations of reductive groups over finite fields, Annals of Mathematics 103 (1976), 103-161

Deligne, P., Milne, J.S.
[1] Tannakian Categories, in: Deligne et al., Hodge cycles, motives and Shimura varieties, Lecture Notes in Math. 900 (1982), Springer-Verlag.

Demazure, M.
[1] Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, Annales Ecole Normale Supérieure 7 (1974), 53-88.

Demazure, M., Gabriel, P.
[1] Groupes algébriques I, Masson/North-Holland 1970.

Demazur, M., Grothendieck, A.
[1] Seminaire de Geometrie Algebrique, SGA 3, Schemas en Groupes I-III, Lecture Notes in Math. 151,152,153 (1970), Springer-Verlag

Dieudonné, J.
[1] La géometrie des groupes classiques, Ergebnisse der Mathematik 5 (2. Aufl.), Springer-Verlag 1962.

Forster, O.
[1] Riemannsche Flächen, Heidelberger Taschenbücher 184, Springer, Berlin 1977.

Freudenthal, H.
[1] Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenenene I, II, Indagationes Mathematicae 16 (1954),218-230.

Frenkel, I.B., Kac, V.
[1] Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models, Inventiones Mathematicae 62 (1980),23-66.

Gelfand, I.M.
[1] Automorphic functions and the theory of representations, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Stockholm 1962), 74-85.

Gelfand, I.M., Neumark, M.A.
[1] Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen, Akademie-Verlag, Berlin 1957.

Godement, R.
[1] Théorie des faisceaux, Hermann 1958.

Gorenstein, D.
[1] Finite groups, Harper & Row 1968.

Griffiths, P., Harris, J.
[1] Principles of algebraich geometry, John Wiley & Sons, New York 1978

Grothendieck, A., Dieudonné, J.
[1] Eléments de géometrie algébrique, Publications mathématiques IHES, 1960-1967.

Harder, G.

[1] Über einen Satz von E.Cartan, Abhandlungen Math. Seminar Univ. Hamburg 28 (1965),208-214.
[2] Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen I, Math. Zeitschrift 90 (1965);II, Ibid. 92 (1966),396-415.
[3] Chevalley groups over function fields and automorphic forms, Annals of Mathematics 100 (1974),249-306.

Hartshorne, R.
[1] Algebraic geometry, Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag 1977.

Humphreys, J.E.
[1] Linear algebraic groups, (2.Aufl.), Graduate Texts in Math. 21, Springer-Verlag 1981.
[2] Reflection groups and Coxeter groups, Cambride University Press 1990.

Jacobson, N.
[1] Lie algebras, Interscience 1962.
[2] Structure and Representations of Jordan Algebras, American Math. Society Colloquium Publications, Vol. XXXIX, American Mathematical Society 1968.
[3] Lectures on quadratic Jordan algebras, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1969.
[4] Basic algebra I, Freeman 1974.
[5] Basic algeba II, Freeman 1980.

Jantzen, J.C.
[1] Representation of algebraic groups, Academic Press 1987.
[2] Lectures on quantum groups, Graduate Studies in Math. 6 (1996), American Mathematical Society.

Kambayashi, T., Miayamishi, M., Takeushi, M.
[1] Unipotent algebraic groups, Lecture Notes in Math. 414 (1974), Springer-Verlag.

Kassel, C.
[1] Quantum groups, Graduate Texts in Math. 155 (1995), Springer-Verlag.

Knus, M.-A., Merkurjev, A., Rost, M., Tignol, J.-P.
[1] The Book of involutions, to appear.

Keller, O.-H.
[1] Analytische Geometrie und lineare Algebra, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963

Kelley, J.L.
[1] General topology, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., Toronto-London-New York 1957

Kolchin, E.R.
[1] Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations, Annals of Mathematics 49 (1948),1-42.
[2] On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups, Annals of Mathematics 49 (1948),774-789.

Lam, T.Y.
[1] Introduction to quadratic forms over fields, Graduate Studies in Mathematics 67, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005

Lang, S.
[1] Algebraic groups over finite fields, Amer. J. Math. 78 (1956),555-563.
[2] Algebra, Addison-Wesley, 1977.

Lazard, M.
[1] Sur les groupes de Lie formels à un paramètre, Bull. Soc. Math. France 83 (1955),251-274.

MacLane, S.
[1] Homology, Springer, Berlin 1963

Matsumura, H.
[1] Commutative algebra, W.A. Benjamin, Inc. New York 1970
[2] Commutative ring theory, Cambridge University Press, New York 1986.

Milne, J.S.
[1] Algebraic groups, The theory of algebraic group schemes of finite type over a field, Cambridge University Press, Cambridge 2017

(a preliminary version from 2015 can be found on the authors home page).
[2] Étale cohomology, Princeton Mathematical Series 33, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980
Mumford, D.
[1] Abelian varieties, Oxford University Press, 1970.
[2] The Red Book of varieties and schemes, Lecture Notes in Math. 1358 (1988), Springer-Verlag
Mumford, D., Fogarty, J.
[1] Geometric invariant theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34, Springer, Berlin•Heidelberg•New York 1982
Oda, T.
[1] Convex bodies and algebraic geometry - An introduction to the theory of toric varieties, Ergebnisse der Math. (3), Bd. 15, Springer-Verlag 1988.
Oesterlé, J.
[1] Nombres de Tamagawa et groupes de unipotents en caractéristique p, Inventiones Mathematicae 78 (1984), 13-88.
Petersson, H.P., Racine, M.
[1] Albert algebras, in: Proceedings Conference on Jordan algebras (ed. W. Kaup, K. McCrimmon, H.P. Petersson), p. 197-207, W. de Guyter, 1994.
Platonov, V.P., Rapinchuk, A.S.
[1] Algebraic groups and number theory (in Russisch), Moscow, 1991 (Englische Übersetzung: Academic Press, 1993)
Richardson, R.W.
[1] Conjugacy classes in Lie algebras and algebraic groups, Annals of Mathematics 86 (1967),1-15.
Ronan, M.
[1] Lectures on buildings, Academic Press, 1989.
Rosenlicht, M.
[1] Some rationality questions on algebraic groups, Annali die Mat. Pura Appl. 43 (1957), 25-50.
[2] Questions of rationality for solvable algebraic groups over nonperfect fields, Annali die Mat. Pura Appl. 61 (1963),97-120.
Russel, P.
[1] Forms of the affine line and its additive group, Pacific J. Maath. 32 (1970),527-539.
Satake, I.
[1] Classification theory of semi-simple algebraic groups (mimeographed notes), University of Chicago, 1967.
Scharlau, W.
[1] Quadratic and Hermitian forms, Grundlehren der math. Wissenschaften 270, Springer-Verlag 1985.
Schubert, H.
[1] Kategorien, Band I und II, Akademie-Verlag, Berlin 1970
Selbach, M.: Klassifikationstheorie halbeinfacher algebraischer Gruppen, Bonner mathematische Schriften 83 (1976)
Serre, J.-P.
[1] Quelques propriétés des variétés abéliennes en caracteristique p, American Journal of Mathematics 80 (1958),715-739.
[2] Cohomologie galoissienne, 5me éd., Lecture Notes in Math. 5 (1994), Springer-Verlag (English translation: Springer-Verlag 1997).
[3] Cohomologie galoissienne, progrès et problèmes, Séminaire Bourbaki 783 (1993-94)
Shafarevich, I.R. (Шафаревич, И.Р)
[1] Basic algebraic gemetry, Grundlehren 213, Springer-Verlag, Heidelberg 1974.
[2] Grundlagen der algebraischen Geometrie, Основы алгебраической геометрии, Наука, Мосва 1972.
Slodowy, P.

[1] Simple singularites and simple algebraic groujps, Lecture Notes in Math. 815 (1980), Springer-Verlag.
Springer, T.A.
[1] Jordan algebras and algebraic groups, Ergebnisse der Math. 75, Springer-Verlag 1970.
[2] Linear algebraic groups, in: Algebraic geometry IV (ed. A.N.Parchin and I.R.Shafarevich), Encyclopedia of Mathematical Sciences, vol. 55 (1994),1-121, Springer-Verlag.
[3] Linear algebraic groups, Birkhäuser, Boston 1981.
Springer, T.A., Veldkamp, F.D.
[1] Octonians, Jordan algebras and exceptional groups, to appear.
Steinberg, R.
[1] Gémérateurs, relations et revêtements de groupes algébriques, in: Collogue sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles, 1963, p. 113-127.
[2] Regular elements of semisimple algebraic groups, Pub.Math. IHES 25 (1965),282-312.
[3] Endomorphisms of linear algebraic groups, Memoirs American Mathematical Society 80 (1968)
[4] Lectures on Chevalley groups, Yale University 1968.
[5] Conjugacy classes in algebraic groups, Lecture Notes in Math. 366 (1974), Springer-Verlag.
Takeuchi, M.
[1] A hyperalgebraic proof of the isomorphism and isogeny theorems for reductive groups, Journal of algebra 85 (1983),179-196
Tannaka, T.
[1] Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen, Tôhoku Mathematical Journal 45 (1938),1-12
Tits, J.
[1] Normalisateurs de tores I, Groupes de Coxeter étendu, Journal of Algebra 4 (1966), 96-116.
[2] Classification of algebraic semisimple groups, in: Algebraic groups and discontinuous groups,Proceedings Symp. Pure Math. IX (1966), 33-62, American Mathematical Society
[3] Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles I, Construction, Indagationes Mathematicae 28 (1966),223-237.
[4] Lectures on algebraic groups, Yale University 1968.
[5] Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, Inventiones Mathematicae 5 (1968),19-41.
[6] Résumé des cours, 1990-1991,1991-1992, 1992-1993, Collège de France, Paris.
[7] Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups, Journal of algebra 131 (1990),648-677.
Waerden, B.L. van der
[1] Algebra I + II, Neunte Auflage, Springer-Verlag 1993
Weibel, C.
[1] introduction to homological algebra, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 18, Cambridge University Press 1994
Weil, A.
[1] On algebraic groups and homogenous spaces, Americal Journal of Mathematics 70 (1955),493-512.
[2] Algebras with involutions and the classical groups, Journal Indian Mathematical Society 24 (1960),589-623.
[3] Foundations of algebraic geometry, revised ed., American Mathematical Society, 1962,
[4] Adeles and algebraic groups, 2nd ed., Birkhäuser 1982.

Anhänge

1 Das Tensorprodukt

Bei der Einführung des Tensorprodukts ist man in einer ähnlichen Situation wie bei der Einführung der Determinante: man kann zwar eine geschlossene Formel dafür angeben, aber diese ist so aufwendig in der Handhabung, daß man sie in praktischen Situationen nie benutzt, man verwendet sie nur für theoretische Betrachtungen.

Beim Tensorprodukt ist die explizite Beschreibung nicht einmal für theoretische Zwecke sinnvoll. Sie ist nur von Nutzen beim Beweis für die Existenz des Tensorprodukts.

Wir beschränken uns hier auf die Handlung des Tensorprodukts über kommutativen Ringen mit 1. Sei A ein kommutativer Ring mi1 1. Wir bezeichnen mit

A-Mod

die Kategorie der (linken) A-Moduln und A-linearen Abbildungen. Für je zwei A-Moduln U, V bezeichnen wir die Hom-Menge der Morphismen $U \longrightarrow V$ in A-Mod mit

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(U, V) = \mathrm{Hom}_A(U, V).$$

1.0 Vorbemerkungen

Sei A ein kommutativer Ring mit 1.

(i) Unser Ziel ist die Betrachtung von bilinearen Abbildungen

$$b: U\times V \to W$$

mit beliebigen A-Moduln U, V und W, d.h. von Abbildungen f mit

$$f(c'u'+c''u'', v) = c'\cdot f(u',v) + c''\cdot f(u'',v)$$
$$f(u, c'v' + c''v'') = c'\cdot f(u,v') + c''\cdot f(u,v'')$$

für beliebige $u,u',u''\in U$, $v,v',v''\in V$ und $c',c''\in K$.

(ii) Genauer, wir wollen die allgemeinste Art von Abbildung dieser Gestalt finden, die es für diese Räumen geben kann.

(iii) Dabei ist die konkrete Konstruktion dieser Abbildung nicht besonders schön, relativ kompliziert und genaugenommen nicht so wichtig. Wichtiger ist ihre Eigenschaft, die ‘allgemeinste’ Abbildung zu sein und die Tatsache, daß es eine solche Bilinearform gibt.

(iv) Wir werden deshalb wie folgt vorgehen.

1 beschreiben zunächst, was wir unter der ‘allgemeinsten’ bilinearen Abbildung verstehen wollen, indem wir deren sogenannte <u>Universalitätseigenschaft</u> angeben.
2. Wir zeigen, durch diese Eigenschaft ist die Konstruktion bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
3. Wir beweisen unter der Annahme, daß das Konstrukt stets existiert, dessen wichtigste Eigenschaften.
4. Erst ganz zum Schluß werden wir zeigen, daß das Konstrukt tatsächlich existiert.

Zunächst wollen wir zur Illustration unserer Vorgehensweise eine ähnlich gelagerte Problemstellung betrachten, deren Lösung wir im wesentlichen bereits kennen.

1.1 Beispiel für eine Universalitätseigenschaft

Für jede A-lineare Abbildung $f:U \to V$ wollen wir eine A-lineare Abbildung

$$\rho:V \to \mathrm{Coker}(f)$$

konstruieren, welche natürliche Abbildung auf den Kokern von f heißt. Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt sein.

1. $\rho\circ f = 0$.
2. Für jede A-lineare Abbildung $g:V\to W$ mit $\rho\circ g = 0$ soll es genau eine A-lineare Abbildung $\tilde{g}$: $\mathrm{Coker}(f) \to W$ geben mit $g = \tilde{g}\circ f$, mit anderen Worten, eine solche lineare Abbildung, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[dl, "\tilde{g}"] \\ W & \end{tikzcd}$$

Bemerkungen zum Begriff der Universalitätseigenschaft

(i) Nach Bedingung 1 ist ρ eine Abbildung mit $\rho\circ f = 0$. Offensichtlich hat jede Zusammensetzung

$$V \xrightarrow{\rho} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{h} W$$

mit einer beliebigen (linearen) Abbildung h ebenfalls diese Eigenschaft,.

(ii) Bedingung 2 besagt gerade, daß man durch Zusammensetzen mit solchen Abbildungen h sämtliche Abbildungen bekommt deren Zusammensetzung mit f Null ist. Und zwar auf genau eine Weise (d.h. verschiedene h liefern verschiedene Zusammensetzungen).

(iii) Genauer: für jeden A-Modul W sei

$$C(W) := \{ g: V \longrightarrow W \mid g \text{ ist K-linear und } g\circ f = 0 \}.$$

Die Universalitätseigenschaft con Coker(f) besagt dann gerade, daß die folgende Abbildung bijektiv ist.

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}(f), W) \longrightarrow C(W), \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\rho.$$

(iv) Anders ausgedrückt bedeutet Bedingung 2 bedeutet gerade, daß die Abbildung ρ in dem Sinne 'universell' ist, daß man aus ihr jede andere Abbildung mit der Eigenschaft 1 gewinnen kann, und zwar auf genau eine Weise. Man sagt in einer solche Situation, ρ ist universell bezüglich Eigenschaft 1 oder auch, 2 ist eine Universalitätseigenschaft.

(v) Die obige Beschreibung des Raumes

$$\mathrm{Coker}(f)$$

entspricht gerade dem ersten Schritt, wie wir ihn für das Tensorprodukt angekündigt haben. Wir zeigen hier zunächst, daß Coker(f) durch die obigen beiden Eigenschaften bereits bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Anschließend beweisen wir die Existenz von (ρ und) Coker(f).

Die Eindeutigkeit von Coker(f) bis auf Isomorphie ei eine weitere A-lineare Abbilduug

$$\rho': V \to C'$$

gegeben, für welche die Bedingungen 1 und 2 mit C' anstelle von C := Coker(f) erfüllt sind.

Dann gilt $\rho'\circ f = 0$. Auf Grund der Eigenschaft 2 von ρ faktorisiert sich ρ' eindeutig über ρ,

$$\rho': V \xrightarrow{\rho} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\tilde{\rho}'} C',$$

d.h. es gibt genau eine A-lineare Abbildung $\tilde{\rho}'$ mit $\rho' = \tilde{\rho}'\circ\rho$.
Da auch ρ' die Universalitätseigenschaft 2 besitzt und $\rho\circ f = 0$ gilt, faktorisiert sich auch ρ eindeutig über ρ',

$$\rho: V \xrightarrow{\rho'} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\tilde{\rho}} C',$$

d.h. es gibt genau eine A-lineare Abbildung $\tilde{\rho}$ mit $\rho = \tilde{\rho}\circ\rho$.

Damit erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho'"'] & C \arrow[dl, "\tilde{\rho}'"] \\ C' & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho'"'] & C \\ C' \arrow[ur, "\tilde{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

und durch Zusammensetzen dieser Dreiecke weiterhin kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \\ C \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "\rho'"'] & C' \\ C' \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

mit $u := \tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}'$ und $u' := \tilde{\rho}'\circ\tilde{\rho}$. Auf Grund von Eigenschaft 2 ist die Abbildung u durch die Kommutativität des ersten Diagramms aber eindeutig bestimmt. Da das Diagramm kommutativ bleibt, wenn man u durch die identische Abbildung ersetzt, folgt

$$\tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}' = u = \mathrm{Id}.$$

Dieselbe Argumentation mit dem zweiten Diagramm liefert

$$\tilde{\rho}'\circ\tilde{\rho} = u = \mathrm{Id}.$$

Mit anderen Worten, $\tilde{\rho}$ und $\tilde{\rho}'$ sind zueinander inverse Isomorphismen und die Räume C und C' sind isomorph (sogar in eindeutig bestimmter Weise!).

<u>Existenz von Coker(f)</u>. Wir setzen

$$\mathrm{Coker}(f) := V/\mathrm{Im}(f)$$

und verwenden für ρ die natürliche Abbildung

$$\rho: V \to V/\mathrm{Im}(f),\ v \mapsto v + \mathrm{Im}(f),$$

auf den Faktorraum,

$$\rho(v) := v + \mathrm{Im}(f).$$

Dann ist Bedingung 1 offensichtlich erfüllt. Beweisen wir, daß auch 2 gilt. Sei also eine A-lineare Abbildung

$$g: V \to W$$

gegeben mit $g\circ f = 0$. Wir haben zu zeigen, es gibt genau eine A-lineare Abbildung

$$\tilde{g}: V/\mathrm{Im}(f) \to W$$

mit $\tilde{g}\circ f = g$. Falls $\tilde{g}$ existiert, so muß gelten,

$$\tilde{g}(v+Im(f)) = \tilde{g}(f(v)) = g(v),$$

mit andern Worten, der Wert von $\tilde{g}$ an der Stelle v+Im(f) ist eindeutig bestimmt.

Wir haben noch die Existenz von $\tilde{g}$ zu beweisen. Wir setzen

(*) $$\tilde{g}(v+Im(f)) := g(v).$$

Falls wir zeigen können, daß diese Definition korrekt ist, so sind wir fertig, denn dann gilt

$$\tilde{g}(f(v)) = g(v) \text{ für alle } v\in V$$

(und offensichtlich ist $\tilde{g}$ eine lineare Abbildung).

Beweisen wir die Korrektheit der Definition (*). Seien v,v'∈V zwei Vektoren mit

$$v + Im(f) = v' + Im(f).$$

Wir haben zu zeigen, daß dann g(v) = g(v') gilt. Auf Grund der Voraussetzung gilt

$$v-v' \in Im(f).$$

Wegen $g\circ f = 0$ gilt $g|_{Im(f)} = 0$, d.h.

$$0 = g(v-v') = g(v) - g(v'),$$

also g(v) = g(v').

QED.

Bemerkung

Wir haben damit die natürliche Abbildung $\rho: V \longrightarrow V/Im(f)$, $v \mapsto v + Im(f)$, für jede lineare Abbilung $f: U \longrightarrow V$ durch eine Universalitätseigenschaft charakterisiert. Ist $U\subseteq V$ ein linearer Unterraum und $f: U \hookrightarrow V$ die natürliche Einbettung, so erhalten wir gerade die folgende Charakterisierung der natürlichen Abbildung

$$\rho : V \longrightarrow V/U, v \mapsto v + U.$$

Es gilt der <u>Homomorphie-Satz</u>:

1. $U \subseteq Ker(\rho)$.
2. Eine lineare Abbildung $g: V \longrightarrow W$ faktorisiert sich genau dann über ρ, wenn U $\subseteq$ Ker(g) gilt.
3. Die Faktorisierung von g über ρ ist, falls sie existiert eindeutig.

1.2 Definition des Tensorprodukts zweier A-Moduln

Seien V und W zwei A-Vektorräume. Das <u>Tensorprodukt</u> von V und W ist ein A-Vektoraum

$$V\otimes W = V\otimes_A W$$

zusammen mit einer A-bilinearen Abbildung

$$\rho=\rho_{V,W}: V\times W \to V\otimes W, (v,w) \mapsto \rho(v,w) =: v\otimes w$$

wobei folgende Bedingung erfüllt ist.

(⊗) A-bilineare Abbildung $b:V\times W\to U$ mit Werten in einem A-Vektorraum U faktorisiert sich eindeutig über ρ,

$$b: V \times W \xrightarrow{\rho} V\otimes W \xrightarrow{\tilde{b}} U,$$

d.h. es gibt genau eine A-lineare Abbildung $\tilde{b}$ mit $b = \tilde{b}\circ\rho$.

Mit anderen Worten, es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\rho"'] & U \\ V\otimes W \arrow[ur, "\widetilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

mit einer linearen Abbildung $\widetilde{b}$, und diese lineare Abbilding $\widetilde{b}$ ist durch die Kommutativität dieses Diagramms eindeutig bestimmt.

Die Elemente von $V\otimes W$ heißen <u>Tensoren</u>.

Bemerkungen

(i) Setzt man die bilineare Abbildung $\rho: V\times W \to V\otimes W$ mit einer linearen Abbildung $V\otimes W \to U$ zusammen, so erhält man trivialerweise eine bilineare Abbildunge $V\times W \to U$. Bedingung $(\otimes)$ besagt gerade, daß man auf diese Weise jede auf $V\times W$ definierte bilineare Abbildung erhält erhält, und zwar jede auf genau eine Weise.

(ii) Bedingung $(\otimes)$ ist äquivalent zu der Aussage, daß die folgende lineare Abbildung bijektiv ist.

$$\mathrm{Hom}_A(V\otimes W, U) \to L(V,W,U),\ \widetilde{b} \mapsto \rho\circ \widetilde{b}.$$

Dabei bezeichne

$$L(V,W;U)$$

den A-Modul der über A bilinearen Abbildungen $V\times W \to U$.

(iii) Wir zeigen als nächstes, daß das Tensorprodukt, falls es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Danach werden wir die wichtigsten Eigenschaften des Tensorprodukt unter der Annahme, daß es existiert, ableiten. Seine Existenz beweisen wir ganz zum Schluß.

1.3 Eindeutigkeit des Tensorprodukts bis auf Isomorphie

Seien V,W zwei A-Vektorräume und

$$b: V\times W \to U \text{ und } b': V\times W \to U'$$

zwei bilineare Abbildungen, welche die Eigenschaft $(\otimes)$ eines Tensorprodukts besitzen.

Dann gibt es genau einen A-linearen Isomorphismus $f: U \to U'$, für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b'"'] & U \arrow[dl, "f", "\cong"'] \\ U' & \end{tikzcd}$$

d.h. es gilt $b' = f\circ b$.

Beweis. Auf Grund der Universalitätseigenschaft $(\otimes)$ von b gibt es zumindest eine A-lineare Abbildung $f: U \to U'$ mit der geforderten Eigenschaft,

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b'"'] & U \arrow[dl, "f"] \\ U' & \end{tikzcd}$$

Weiterhin gibt es aber auch (auf Grund der Universaltätseigenschaft (⊗) von b') eine A-lineare Abbildung f' sodaß

$$\begin{array}{ccc} V\times V & \xrightarrow{b} & U \\ b'\downarrow & \nearrow f' & \\ U' & & \end{array}$$

kommutativ ist. Durch Zusammensetzen dieser kommutativen Dreiecke erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} V\times V & \xrightarrow{b'} & U' \\ b'\downarrow & \nearrow u' & \\ U' & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} V\times V & \xrightarrow{b} & U \\ b\downarrow & \nearrow u & \\ U & & \end{array}$$

mit u := f∘f' und u' := f'∘f. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage von (⊗) sind die linearen Abbildungen u und u' durch die Kommutativität dieser Diagramme eindeutig festgelegt. Da die Diagramme aber kommutativ bleiben, wenn man u und u' durch die identischen Abbildungen ersetzt, gilt

$$f\circ f' = u = Id \text{ und } f'\circ f = u' = Id.$$

Die Abbildungen f und f' sind folglich zueinander inverse Isomorphismen.
QED.

Bemerkungen

(i) Aus der obigen Argumentation ergibt sich, daß jede A-lineare Abbildung f, für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V\times V & \xrightarrow{b} & U \\ b'\downarrow & \swarrow f & \\ U' & & \end{array}$$

kommutativ ist, automatisch ein Isomorphismus ist.

(ii) Im folgenden nehmen wir an, daß das Tensorprodukt zweier A-Vektorräume V und W stets existiert. Das Bild des Paares $(v,w)\in V\times W$ bei der natürlichen Abbildung

$$\rho = \rho_{V,W}: V\times W \to V\otimes W$$

bezeichnen wir wie in der Definition mit $v\otimes w$, d.h. die natürliche Abbildung soll gerade die Abbildungsvorschrift

$$V\times W \to V\otimes W,\ (v,w) \mapsto v\otimes w.$$

haben. Die Bilinearität der natürlichen Abbildung ρ bedeutet gerade, daß die folgenden Rechenregeln gelten.

(a) $(v'+v'')\otimes w = v'\otimes w + v''\otimes w$

(b) $v\otimes(w'+w'') = v\otimes w' + v\otimes w''$

(c) $(cv)\otimes w = c(v\otimes w) = v\otimes(cw)$

für beliebige $v,v',v''\in V$, $w,w',w''\in W$, $c\in A$.

Wir beweisen als nächstes die wichtigsten Eigenschaften des Tensorprodukts.

1.4 Ein Erzeugendensystem für V⊗W

Seien $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ Erzeugendensysteme der A-Vektorräume V bzw. W. Dann bilden die Vektoren der Gestalt

$$v_i\otimes w_j$$

mit $i\in I$ und $j\in J$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums $V\otimes W$.

Beweis. Sei

$$U := < v_i\otimes w_j \mid i \in I, j \in J > \subseteq V\otimes W$$

der von den Vektoren $v_i\otimes w_j$ erzeugte A-Teilmodul von $V\otimes W$. Jeder Vektor $v\in V$ ist Linearkombination der v_i und jeder Vektor $w\in W$ ist Linearkombination der w_j . Also ist $v\otimes w$ Linearkombination der $v_i\otimes w_j$. Mit anderen Worten, für jedes $v\in V$ und jedes $w\in W$ gilt

$$v\otimes w \in U.$$

Die Abbildungsvorschrift der natürlichen Abbildung

$$\rho: V \times W \to V\otimes W, (v,w) \mapsto v\otimes w$$

definiert also auch eine bilineare Abbildung

$$b:V\times W \to U, (v,w) \mapsto v\otimes w.$$

Insbesondere hat man ein kommutatives Diagramm

(1)
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\rho"'] & U \arrow[dl, "i"] \\ V\otimes W & \end{tikzcd}$$

wenn

$$i: U \to V\otimes W$$

die natürliche Einbettung bezeichnet. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, die natürliche Einbettung i ist surjektiv, denn dann gilt

$$V\otimes W = U = <u_i\otimes v_j \mid i\in I, j\in J>.$$

Weil b bilinear ist, ergibt sich aus der Universalitätseigenschaft von ρ die Existenz einer linearen Abbildung $\tilde{b}$, für welches das Diagramm

(2)
$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\rho"'] & U \\ V\otimes W \arrow[ur, "\tilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, d.h. mit

$$\tilde{b}(v\otimes w) = v\otimes w.$$

Durch Zusammensetzen der Diagramme (1) und (2) erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} V\times W & \xrightarrow{\rho} & V\otimes W \\ \rho\downarrow & \nearrow i\circ\tilde{b} & \\ V\otimes W & & \end{array}$$

Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage der Universalitätseigenschaft von ρ muß dann aber

$$i\circ\tilde{b} = Id$$

gelten. Für jedes $t \otimes V\otimes W$ gilt also

$$t = Id(t) = i(\tilde{b}(t)) \in Im(i),$$

d.h. es ist

$$Im(i) = V\otimes W.$$

Die natürliche Einbettung $i : U \to V\otimes W$ ist somit surjektiv.
QED.

1.5 Eigenschaften des Tensorprodukts von Moduln

Seien U, V, W beliebige A-Moduln. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt genau eine K-lineare Abbildung $V\otimes_A A\to V$ mit

$$v\otimes c \mapsto cv.$$

Diese ist ein Isomorphismus

$$V\otimes_A A \cong V.$$

(ii) Es gibt genau eine A-lineare Abbildung $V\otimes_A W \to W\otimes_A V$ mit

$$v\otimes w \mapsto w\otimes v.$$

Diese ist ein Isomorphismus,

$$V\otimes W \cong W\otimes V$$

(iii) Es gibt genau eine A-lineare Abbildung $U\otimes_A(V\otimes_A W) \to (U\otimes_A V)\otimes_A W$ mit

$$u\otimes(v\otimes w) \mapsto (u\otimes v)\otimes w.$$

Diese ist ein Isomorphismus

$$U\otimes_A (V\otimes_A W) \cong (U\otimes_A V)\otimes_A W.$$

(iv) Es gibt genau eine bilineare Abbildung $U\otimes_A (V\oplus W) \to (U\otimes_A V)\oplus(U\otimes_A W)$ mit

$$u\otimes(v,w) \mapsto (u\otimes v, u\otimes w).$$

Diese ist ein Isomorphismus

$$U\otimes_A(V\oplus W) \cong (U\otimes_A V)\oplus(U\otimes_A W).$$

Beweis. Zu (i). Wir betrachten die bilineare Abbildung

$$m: V\times A \to V,\ (v,c) \mapsto cv.$$

Zeigen wir, diese Abbildung besitzt die Eigenschaft $(\otimes)$ des Tensorprodukts.

Sei also $b: V\times A \to P$ eine bilineare Abbildung. Wir haben zu zeigen, diese Abbildung faktorisiert sich eindeutig über m,

$$b: V \times A \xrightarrow{m} V \xrightarrow{\tilde{b}} P,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{b}$ mit $b = \tilde{b}\circ m$.

Eindeutigkeit von $\tilde{b}$. Für jedes $v\in V$ gilt, falls $\tilde{b}$ existiert,

$$\tilde{b}(v) = \tilde{b}(1\bullet v) = \tilde{b}(m(v,1)) = b(v,1).$$

Mit anderen Worten $\tilde{b}$ ist durch b eindeutig festgelegt.

Existenz von $\tilde{b}$.
Wir setzen

$$\tilde{b}(v) := b(v,1) \text{ für jedes } v \in V.$$

Weil b bilinear ist, ist auf diese Weise eine lineare Abbildung

$$\tilde{b}: V \longrightarrow P$$

definiert. Für beliebige $(v, c) \in V \times A$ gilt

$$\tilde{b}(m(v, c)) = \tilde{b}(cv) = b(cv, 1) = c\bullet b(v,1) = b(v, c\bullet 1) = b(v,c).$$

Wir haben gezeigt, $b = \tilde{b}\circ m$, d.h. $\tilde{b}$ ist die Abbildung mit der geforderten Eigenschaft.

Wir haben gezeigt, die oben definierte Abbildung m besitzt die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts. Auf Grund von Bemerkung 1.3 (i) gibt es genau einen Isomorphismus

$$\tilde{m}: V\otimes K \longrightarrow V,$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V\times K \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\rho"'] & V \\ V\otimes K \arrow[ur, "\tilde{m}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Auf Grund der Kommutativität dieses Diagramms gilt aber

$$\tilde{m}(v\otimes c) = \tilde{m}(\rho(v,c)) = m(v,c) = cv,$$

d.h. $\tilde{m}$ ist der Isomorphismus, dessen Existenz in Aussage (i) behauptet wird.

Zu (ii). Betrachten wir die Abbildung

$$b:V\times W \to W\otimes V,\ (v,w) \mapsto w\otimes v.$$

Nach Bemerkung 1.3 (ii) ist diese Abbildung bilinear. Deshalb faktorisiert sich diese Abbildiung eindeutig über das Tensorprodukt $V\otimes W$,

$$b: V \times W \xrightarrow{\rho} V\otimes W \xrightarrow{f} W\otimes V,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung f mit $b = f\circ\rho$, d.h.

$$f(v\otimes w) = f(\rho(v,w)) = b(v,w) = w\otimes v.$$

Wir haben noch zu zeigen, die lineare Abbildung

$$f: V\otimes W \to W\otimes V,\ v\otimes w \mapsto w\otimes v.$$

ist ein Isomorphismus. Aus Symmetriegründen gibt es aber auch genau eine A-lineare Abbildung

$$f': W\otimes V\to V\otimes W,\ w\otimes v \mapsto v\otimes w$$

Es gilt

$$(f\circ f')(w\otimes v) = w\otimes v$$

und

$$(f'\circ f)(v\otimes w) = v\otimes w,$$

für beliebige $v \in V$ und $w \in W$.

Die Abbildungen $f\circ f'$ und $f'\circ f$ wirken auf einem Erzeugendensystem von $W\otimes V$ bzw. $V\otimes W$ wie die identische Abbildung, sind also selbst identische Abbildungen. Also sind f und f' zueinaner inverse Isomorphismen.

Zu (iii). Betrachten wir für vorgegebens $w \in W$ die Abbildung

$$U\times V \to U\otimes(V\otimes W),\ (u,v) \mapsto u\otimes(v\otimes w).$$

Diese Abbildung ist bilinear, faktorisiert sich also über das Tensorprodukt $U\otimes V$,

$$U \times V \xrightarrow{\rho} U\otimes V \xrightarrow{f_w} U\otimes(V\otimes W),$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung f_w, deren Zusammensetzung mit ρ gerade die vorgegebene Abbildung ist, d.h. eine lineare Abbildung f_w mit

$$f_w(u\otimes v) = f_w(\rho(u,v)) = u\otimes(v\otimes w).$$

Untersuchen wir, in welcher Weise die lineare Abbildung

$$f_w\colon U\otimes V \to U\otimes(V\otimes W),\ u\otimes v \mapsto u\otimes(v\otimes w),$$

von $w \in W$ abhängt, d.h. betrachten wir die Abbildung

$$f\colon(U\otimes V)\times W \to U\otimes(V\otimes W),\ (t, w) \mapsto f_w(t).$$

Diese Abbildung ist linear in t. Zeigen wir, daß sie auch linear in w ist, d.h. daß gilt

$$f_{c'w'+c''w''}(t) = c'f_{w'}(t) + c''f_{w''}(t).$$

Zumindest stehen auf beiden Seiten der zu beweisenden Identität A-lineare Abbildungen

$$\varphi\colon U\otimes V \to U\otimes(V\otimes W),\ t \mapsto \varphi(t).$$

und die Abbildung auf der linken Seite ist durch die folgende Bedingung eindeutig festgelegt:

$$\varphi(u\otimes v) = u\otimes(v\otimes(c'w'+c''w'')).$$

Zum Beweis der Gleichheit reicht es folglich, wenn wir zeigen, die Abbildung auf der rechten Seite genügt derselben Bedingung. Sei also φ die Abbildung auf der rechten Seite. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(u\otimes v) &= c'f_{w'}(u\otimes v) + c''f_{w''}(u\otimes v)\\
&= c'\cdot u\otimes(v\otimes w') + c''u\otimes(v\otimes w'')\\
&= u\otimes(c'\cdot(v\otimes w')) + u\otimes(c''\cdot(v\otimes w''))\\
&= u \otimes (v\otimes c'w') + u \otimes (v\otimes c''w'')\\
&= u \otimes (v\otimes c'w' + v\otimes c''w'')\\
&= u \otimes (v\otimes(c'w'+c''w''))
\end{aligned}$$

Damit ist die Bilinearität der Abbildung f gezeigt. Die Abbildung f faktorisiert sich damit über das Tensorprodukt $(U\otimes V)\otimes W$,

$$f\colon (U\otimes V)\times W \xrightarrow{\rho} (U\otimes V)\otimes W \xrightarrow{g} U\otimes(V\otimes W),$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung g mit $f = g\circ\rho$, d.h. mit

$$g(t\otimes w) = g(\rho(t, w)) = f(t, w) = f_w(t).$$

Da die Abbildung f_w bereits durch ihre Werte in den Elementen der Gestalt $t = u\otimes v$ eindeutig festgelegt ist, gilt dasselbe für g, wobei

$$g((u\otimes v)\otimes w) = f_w(u\otimes v) = u\otimes(v\otimes w)$$

ist[1]. Wir haben damit gezeigt, es gibt genau eine A-lineare Abbildung

$$g: (U\otimes V)\otimes W \to U\otimes(V\otimes W)$$

mit $g((u\otimes v)\otimes w) = u\otimes(v\otimes w)$. Wir haben noch zu zeigen, diese Abbildung ist ein Isomorphismus.

Eine analoge Argumentation wie die eben angeführte zeigt, es gibt genau eine A-lineare Abbildung

$$h: U\otimes(V\otimes W) \to (U\otimes V)\otimes W$$

mit

$$h(u\otimes(v\otimes w)) = (u\otimes v)\otimes w$$

für alle $u\in U$, $v\in V$, $w\in W$. Die beiden Formeln für g und h zeigen, die beiden Zusammensetzungen sind lineare Abbildungen

$$g\circ h: U\otimes(V\otimes W) \to U\otimes(V\otimes W)$$
$$h\circ g: (U\otimes V)\otimes W \to (U\otimes V)\otimes W$$

mit

$$g\circ h(u\otimes(v\otimes w)) = u\otimes(v\otimes w)$$

und

$$h\circ g((u\otimes v)\otimes w) = (u\otimes v)\otimes w$$

für alle $u\in U$, $v\in V$, $w\in W$. Nach 1.4 bilden aber die Vektoren der Gestalt

$$u\otimes(v\otimes w) \text{ bzw. } (u\otimes v)\otimes w$$

ein Erzeugendensystem des Vektorraums $U\otimes(V\otimes W)$ bzw. $(U\otimes V)\otimes W$. Die beiden Zusammensetzungen stimmen also auf einem Erzeugendensystem mit der identischen Abbildung überein, sind also gleich der identisdchen Abbildung. Wir haben gezeigt, g und h sind zueinander inverse Isomorphismen.

<u>Zu (iv)</u>. Betrachten wir die Abbildung

$$f: U\times(V\oplus W) \to (U\otimes V)\oplus(U\otimes W),\ (u, (v,w)) \mapsto (u\otimes v, u\otimes w).$$

Auf Grund der Bilinearität von $\otimes$ ist f ebenfalls bilinear:

$$\begin{aligned}
f(c'u' + c''u'',(v,w)) &= ((c'u' + c''u'')\otimes v, (c'u' + c''u'')\otimes w)\\
&= (c'u'\otimes v + c''u''\otimes v, c'u'\otimes w + c''u''\otimes w)\\
&= (c'u'\otimes v, c'u'\otimes w) + (c''u''\otimes v, c''u''\otimes w)\\
&= c'f(u',(v,w)) + c''f(u'', (v,w))\\
f(u, c'(v',w') + c''(v'',w'')) &= f(u, (c'v'+c''v'',c'w'+c''w''))\\
&= (u\otimes(c'v'+c''v''), u\otimes(c'w'+c''w''))\\
&= (c'u\otimes v' + c''u\otimes v'', c'u\otimes w' + c''u\otimes w'')\\
&= c'(u\otimes v', u\otimes w') + c''(u\otimes v'', u\otimes w'')\\
&= c'f(u, (v',w')) + c''f(u, (v'',w''))
\end{aligned}$$

Damit ist die Bilinearität von f bewiesen. Die Abbildung faktorisiert sich also eindeutig über die natürliche Abbildung ins Tensorprodukt $U\otimes(V\oplus W)$,

---

[1] Alternative Argumentationen: jedes $t \in U\otimes V$ ist A-Linearkombinnation von Elementen der Gestalt $u\otimes v$ und jedes Element von $(U\otimes V)\otimes W$ ist A-Linearkombination von Elementen der Gestalt $(u\otimes v)\otimes w$.

$$f: U \times (V\oplus W) \xrightarrow{\rho} U\otimes(V\oplus W) \xrightarrow{\tilde f} (U\otimes V)\oplus(U\otimes W),$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde f$ mit $f = \tilde f\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde f(u\otimes(v,w)) = \tilde f(\rho(u, (v,w))) = f(u, (v,w)) = (u\otimes v, u\otimes w)$$

Wir haben noch zu zeigen, die lineare Abbildung

$$\tilde f: U\otimes(V\oplus W) \to (U\otimes V)\oplus(U\otimes W), \qquad (3)$$
$$u\otimes(v,w) \mapsto (u\otimes v, u\otimes w),$$

ist ein Isomorphismus. Dazu reicht eis zu zeigen, es gibt eine lineare Abbildung

$$\tilde g: (U\otimes V)\oplus(U\otimes W) \to U\otimes(V\oplus W), \qquad (4)$$
$$(u'\otimes v',u''\otimes w'') \mapsto u'\otimes(v',0) + u''\otimes(0,w'')$$

und die beiden Zusammensetzungen

$$\tilde g\circ\tilde f; U\otimes(V\oplus W) \longrightarrow U\otimes(V\oplus W) \qquad (5)$$
$$u\otimes(v,w) \mapsto (u\otimes v,u\otimes w) \mapsto u\otimes(v,0)+u\otimes(0,w) = u\otimes(v,w)$$
$$\tilde f\circ\tilde g: (U\otimes V)\oplus(U\otimes W) \mapsto (U\otimes V)\oplus(U\otimes W) \qquad (6)$$
$$(u'\otimes v',u''\otimes w'') \mapsto u'\otimes(v',0) + u''\otimes(0,w'') \mapsto (u'\otimes v,0)+(0,u''\otimes w'')=(u'\otimes v',u''\otimes w'')$$

sind gerade die Identischen Abbildungen.
Abbildung (5) ist dabei ganz offensichtlich die identische Abbildungen, denn bei (5) wird ein Erzeugendensystem von $U\otimes(V\oplus W)$ genauso abgebildet wie bei der identischen Abbildung. Um zu zeigen, auch (6) ist die identische Abbildung, reicht es zu zeigen, die Einschränkung von (6) auf jeden der beiden direkten Summanden ist die identische Abbildung. Diese beiden Einschränkungen bilden aber jeweils ein Erzeugendensystem so ab wie die identische Abbildung:

$$U\otimes V \to U\otimes V\ , u\otimes v \mapsto u\otimes v \text{ bzw. } U\otimes W\to U\otimes W,\ u\otimes w \mapsto u\otimes w.$$

Wir haben somit nur noch zu zeigen, daß die lineare Abbildung (4) existiert. Dazu wiederum reicht es zu zeigen, daß die beiden Einschränkungen auf die beiden direkten Summanden existieren:

$$U\otimes V \to U\otimes(V\oplus W),\ u\otimes v \mapsto u\otimes(v, 0),$$
$$U\otimes W \to U\otimes(V\oplus W),\ u\otimes w \mapsto u\otimes(0,w).$$

Diese beiden letzten Abbildungen existieren aber wegen der Universalitätseingenschaft des Tensorprodukts und der Bilinearität der beiden folgenden Abbildungen.

$$U\times V \to U\otimes(V\oplus W),\ (u, v) \mapsto (u\otimes v, 0),$$
$$U\times W \to U\otimes(V\oplus W),\ (u, w) \mapsto (0, u\otimes w).$$

QED.
Bemerkung
Aussage (iv) läßt sich auf den Fall einer beliebigen Familie $\{V_i\}_{i\in I}$ von A-Moduln verallgemeinern: die A-lineare Abbildung

$$U\otimes(\oplus_{i\in I} V_i) \longrightarrow \oplus_{i\in I} (U\otimes V_i),\ u\otimes \sum_{i\in I} v_i \mapsto \sum_{i\in I} u\otimes v_i\ ,$$

ist wohldefiniert und bijektiv und besitzt die Umkehrung

$$\oplus_{i\in I}(U\otimes V_i) \longrightarrow U\otimes(\oplus_{i\in I} V_i),\ \sum_{i\in I} u_i\otimes v_i \mapsto \sum_{i\in I} u_i\otimes\{\delta_{ij}\bullet v_i\}_{j\in I}\} = \sum_{i\in I} u_i\otimes v_i.$$

Die Schreibweise ganz rechts identifiziert dabei jedes V_i mit dem Teilmodul der direkten Summe $\oplus_{i\in I} V_i$, dessen Elemente nur an der i-ten Stelle eine von Null verschiedene Koordinate besitzen.

Der **Beweis** ist im wesentlichen derselbe. Man zeigt, daß die Abbilduing

$$f: U \times (\oplus_{i\in I} V_i) \longrightarrow \oplus_{i\in I}(U\otimes V_i),\ (u, \sum_{i\in I} v_i) \mapsto \sum_{i\in I} u\otimes v_i\ ,$$

bilinear ist, und erhält so eine A-lineare Abbildung

$$f: U \otimes (\oplus_{i\in I} V_i) \longrightarrow \oplus_{i\in I}(U\otimes V_i),\ u\otimes \sum_{i\in I} v_i \mapsto \sum_{i\in I} u\otimes v_i\ .$$

Dann zeigt man für jedes $i\in I$, daß die Abbildung[2]

$$U\times V_i \to U\otimes(\oplus_{i\in I} V_i),\ (u, v) \mapsto u\otimes\{\delta_{ij}\bullet v\}_{j\in I},$$

bilinear ist, und erhält so für jedes $i\in I$ die A-lineare Abbildung

$$g_i: U\otimes V_i \to U\otimes(\oplus_{i\in I} V_i),\ u\otimes v \mapsto u\otimes\{\delta_{ij}\bullet v\}_{j\in I},$$

Die Abbildungen g_i setzen sich zu einer A-linearen Abbildung

$$g: \oplus_{i\in I}(U\otimes V_i) \longrightarrow U \otimes (\oplus_{i\in I} V_i),\ \sum_{i\in I} u\otimes v_i \mapsto \sum_{i\in I} g_i(u\otimes v_i),$$

zusammen. Es reicht zu zeigen, f und g sind invers zueinander. Das wird auf dieselbe Weise wie im Fall von zwei Summanden gezeigt. Es gilt

$$g(f(u\otimes v_i)) = g(u\otimes v_i) = u\otimes\{\delta_{ij}\bullet v_i\}_{j\in I} = u\otimes v_i.$$

Weil die Elemente der Gestalt $u\otimes v_i$ ein Erzeugendensystem von $U \otimes (\oplus_{i\in I} V_i)$ bilden, folgt

$$g\circ f = Id.$$

Weiter gilt

$$f(g(u\otimes v_i)) = f(u\otimes\{\delta_{ij}\bullet v_i\}_{j\in I}) = f(u\otimes v_i) = u\otimes v_i.$$

Weil die Elemente der Gestalt $u\otimes v_i$ ein Erzeugendensystem von $\oplus_{i\in I}(U\otimes V_i)$ bilden, folgt

$$f\circ g = Id.$$

QED.

1.6 Eigenschaften des Tensorprodukts von Elementen

Seien V und W zwei A-Moduln und $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ zwei Familien von Elementen auf V bzw. W. Dann gelten die folgenden Aussagen.

[2] Für $i \neq j$ sei $\delta_{ij}\bullet v$ das Null-Element des Moduls V_j (obwohl v in V_i liegen soll).

(i) Sind die v_i in V und die w_j in W linear unabhängig, so sind es auch die $v_i \otimes w_j$ in $V \otimes W$
(vorausgesetzt, die v_i lassen sich zu einer Basis von V und die w_j lassen sich zu einer Basis von W ergänzen - was im Fall, daß A ein Körper ist, stets der Fall ist)[3].

(ii) Bilden die v_i ein Erzeugendensystem von V und die w_j eines von W, so bilden die $v_i \otimes w_j$ eines $V \otimes W$.

(iii) Bilden die v_i eine Basis von V und die w_j eine von W, so bilden die $v_i \otimes w_j$ eine $V \otimes W$.

Unter einer <u>Basis</u> wollen wir hier ein über A linear unabhängiges Erzeugendensystem verstehen.

Beweis. Aussage (ii) wurde bereit bewiesen (vgl. 1.4). Aussage (iii) folgt aus (i) und (ii). Es reicht also, Aussage (i) zu beweisen.
Zum Beweis von (i) können wir die Familien $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ zu Basen von V bzw. W ergänzen, d.h. wir können annehmen,

$(v_i)_{i\in I}$ ist eine Basis von V

---

[3] Auf die in Klammern angegebenen zusätzlichen Bedingungen kann man verzichten. Der Beweis ohne diese Voraussetzungen erfordert jedoch etwas homomogische Algebra. Seien

$$V' := \sum_{i\in I} A\bullet v_i \subseteq V \text{ und } W' := \sum_{j\in J} A\bullet w_j \subseteq W$$

die von den v_i bzw. w_j erzeugten freien Teilmoduln von V bzw. W. Dann sind die Zeilen und Spalten des folgenden kommutativen Diagramms exakt.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & V'\otimes W' & \xrightarrow{\alpha} & V\otimes W' & \xrightarrow{\beta} & (V/V')\otimes W' & \longrightarrow 0 \\
 & a\downarrow & & b\downarrow & & c\downarrow & \\
0 \longrightarrow & V'\otimes W & \xrightarrow{\gamma} & V\otimes W & \xrightarrow{d} & (V/V')\otimes W & \longrightarrow 0 \\
 & d\downarrow & & e\downarrow & & f\downarrow & \\
0 \longrightarrow & V'\otimes(W/W') & \xrightarrow{\varepsilon} & V\otimes(W/W') & \xrightarrow{\zeta} & (V/V')\otimes(W/W') & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Die Zeilen dieses Diagramms entstehen aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V/V' \longrightarrow 0$$

durch Tensorieren mit W', W und W/W', die Spalten aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow W \longrightarrow W/W' \longrightarrow 0$$

durch Tensorieren mit V', V und V/V'. Auf Grund der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts reicht es, die Injektivität von a, b, c und α, γ, ε zu beweisen. Dazu reicht es zu zeigen, daß die beiden exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V/V' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow W \longrightarrow W/W' \longrightarrow 0$$

zerfallen, d.h. die Moduln in der Mitte sind direkte Summen der beiden äußeren Moduln, d.h. in der Menge der Isomorphie-Klassen der Erweiterungen von V/V' mit V' (bzw. von W/W' mit W') repräsentieren die beiden exakten Sequenzen das Null-Element. Dazu reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Ext}^1_A(V', V/V') = 0 = \mathrm{Ext}^1_A(W', W/W').$$

Das ist aber trivialerweise der Fall, weil V' und W' freie A-Moduln sind.

$(w_j)_{j\in J}$ ist eine Basis von W.
Wir können dann V und W wie folgt als direkte Summen schreiben.

$$V = \sum_{i\in I} A\bullet v_i = \oplus_{i\in I} A\bullet v_i$$

$$W = \sum_{j\in J} A\bullet w_j = \oplus_{j\in J} A\bullet w_j$$

Nach Bemerkung 1.5 folgt

$$\begin{aligned} V\otimes W &= (\oplus_{i\in I} A\bullet v_i)\otimes(\oplus_{j\in J} A\bullet w_j) \\ &= \oplus_{i\in I}\oplus_{j\in J} (A\bullet v_i)\otimes(A\bullet w_j) \end{aligned}$$

Weil die v_i und w_j eine Basis von V bzw. W bilden, bestehen Isomorphismen

$$A\bullet v_i \longrightarrow A,\ a\bullet v_i \mapsto a, \text{ und } A\bullet w_j \longrightarrow A,\ a\bullet w_j \longrightarrow a,$$

und damit auch Isomorphismen

$$(A\bullet v_i)\otimes(A\bullet w_j) \longrightarrow A\otimes A \longrightarrow A,\ (x\bullet v_i)\otimes(y\bullet w_j) \mapsto x\otimes y \mapsto xy.$$

Als Teilmodul von V⊗W ist aber

$$(A\bullet v_i)\otimes(A\bullet w_j) = A\bullet v_i\otimes w_j.$$

Auf Grund des Isomorphismus gilt deshalb

$$a\bullet v_i\otimes w_j = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Zusammen mit

$$V\otimes W = \oplus_{i\in I}\oplus_{j\in J} A\bullet v_i\otimes w_j$$

bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij}\bullet v_i\otimes w_j = 0 &\Leftrightarrow a_{ij}\bullet v_i\otimes w_j = 0 \text{ für beliebige } (i,j)\in I\times J \\ &\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \text{ für beliebige } (i,j)\in I\times J \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, die $v_i\otimes w_j$ sind linear unabhängig.

QED.

Bemerkungen

(i) Aussage (iii) bietet die Möglichkeit, die Existenz des Tensorproduktes zu beweisen für den Fall, daß A ein Körper ist: Man wähle in V und W jeweils eine Basis (v_i) bzw. (w_j) und definere V⊗W als den Raum mit der Basis $\{v_i\otimes w_j\}$. Man hat dann allerdings die Unabhängigkeit der Konstruktion von der Wahl der Basen zu beweisen. Unser Beweis wird von vornherein unabhängig von jeder Basis sein.

(ii) Ausssage (i) ist für Ringe A, die keine Körper sind im allgemeinen falsch ohne die zusätzliche in Klammern angegebene Bedingung. Das nachfolgende Beispiel illustriert dieses Phänomen.

Beispiel.
Seien k ein Körper und A = k[x] der Polynomring über k in einer Unbestimmten x. Weiter sei

$$B = A[y]/(x\bullet y)$$

Jedes Polynom von A[y] = A[x, y] läßt sich auf genau eine Weise in der Gestalt

$$f(x) + y\cdot g(y) + xy\cdot h(x,y) \text{ mit } f\in k[x],\ g\in k[y],\ h\in k[x,y].$$

schreiben. Der erste Summand enthält alle Summanden, in denen y nicht vorkommt, der zweite alle Summanden, in denen x nicht vorkommt - außer dem Absolutglied - und der dritte alle übrigen Summanden. Auf Grund dieser Zerlegung kann man B identifizieren mit

$$B = A \oplus y\cdot k[y].$$

Insbesondere ist $1 \in B$ linear unabhängig über dem Teilring A. Weiter ist x linear unabhängig über A: mit $a\cdot x = 0$ in A gilt $a = 0$. Betrachten wir

$$x\otimes 1 \in A\otimes_A B$$

Beim Isomorphismus

$$A\otimes_A B \xrightarrow{\cong} B,\ a\otimes b \mapsto b,$$

geht $x\otimes 1$ über in $x \in B$.

1.7 Die Koordinaten eines Tensors

Seien V und W zwei A-Moduln und

$$(v_i)_{i\in I} \text{ und } (w_j)_{j\in J}$$

Basen von V bzw. W. Dann läßt sich jeder Tensor

$$t \in V\otimes W$$

in der Gestalt

$$t = \sum_{i\in I, J\in J} c^{ij}\, v_i\otimes w_j$$

schreiben mit eindeutig bestimmten $c^{ij}\in K$. die c^{ij} heißen <u>Koordinaten des Tensors</u> t bezüglich der gegebenen Basen.

Sind endlich viele A-Moduln

$$V_1 , \dots , V_r$$

gegeben und für jedes i eine Basis

$$\{ v_{j,i} \}_{j\in J_i}$$

von V_i so hat man für jeden Tensor

$$t\in V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$

eindeutig bestimmte Elemente

$$c^{i_1 i_2 \dots i_r}\in K$$

mit

$$t = \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r} c^{i_1 i_2\dots i_r}\, v_{i_1,1}\otimes\dots\otimes v_{i_r,r}\ .$$

Die $c^{i_1 i_2\dots i_r}$ heißen dann <u>Koordinaten des Tensors</u> t bezüglich der gegebenen Basen.

1.8 Das Verhalten der Koordinaten bei Basiswechsel

Seien

$$V_1, \dots, V_r$$

endlich viele A-Moduln und seien für jedes $i \in \{1,...,r\}$ zwei Basen

$$v_i := \{ v_{j,i} \}_{j\in J_i} \qquad v'_i := \{ v'_{j,i} \}_{j\in J_i}$$

von V_i gegeben. Wir betrachten die Koordinaten eines Tensors

$$t\in V_1 \otimes ... \otimes V_r$$

bezüglich der beiden Familien von Basen:

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i_1\in J_1,...,i_r\in J_r} c^{i_1 i_2 ... i_r} v_{i_1,1}\otimes...\otimes v_{i_r,r} \\ &= \sum_{i_1\in J_1,...,i_r\in J_r} c'^{i_1 i_2 ... i_r} v'_{i_1,1}\otimes...\otimes v'_{i_r,r}. \end{aligned}$$

Bezeichne $A := M(Id) = (a^i_{j\ell})$ die Basiswechelsmatrix für den Übergang der Basis v_ℓ zur Basis v'_ℓ,

$$v_{j,\ell} = \sum_{\alpha\in J_\ell} a^\alpha_{j\ell} \; v'_{\alpha,\ell}$$

Dann besteht zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Koordinaten von t die folgende Relation.

$$c'^{i_1...i_r} = \sum_{\alpha_1\in J_1,...,\alpha_r\in J_r} a^{i_1}_{\alpha_1,1} \cdot ... \cdot a^{i_r}_{\alpha_r,r} c^{\alpha_1...\alpha_r}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i_1\in J_1,...,i_r\in J_r} c^{i_1...i_r} v_{i_1,1}\otimes...\otimes v_{i_r,r} \\ &= \sum_{i_1\in J_1,...,i_r\in J_r} c^{i_1 i_2...i_r} \Big(\sum_{\alpha_1\in J_1} a^{\alpha_1}_{i_1,1} v'_{\alpha_1,1}\Big)\otimes...\otimes\Big(\sum_{\alpha_r\in J_r} a^{\alpha_r}_{i_r,r} v'_{\alpha_r,r}\Big) \\ &= \sum_{i_1\in J_1,...,i_r\in J_r} \; \sum_{\alpha_1\in J_1,...,\alpha_r\in J_r} a^{\alpha_1}_{i_1,1} \cdot ... \cdot a^{\alpha_r}_{i_r,r} c^{i_1 i_2...i_r} v'_{\alpha_1,1}\otimes...\otimes v'_{\alpha_r,r} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung.
QED.

1.9 Bemerkungen zum den Tensoren der Physik

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum,

$$v_1,...,v_n\in V \tag{1}$$

eine Basis von V und

$$v^1,\dots,v^n \in V^* \qquad (2)$$

die zugehörige duale Basis. Bezeichne

$$V^{\otimes r} \text{ bzw.} V^{*\otimes s}$$

die r-te Tensorpotenz von V bzw. die s-te Tensorpotenz von V*, d.h. das Tensorprodukt von r Exemplaren des Raumes V (bzw. s Exemplaren des Raumes V*). Ein r-fach kovarianter und s-fach kontravarianter Tensor im ist ein Element von

$$V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s},$$

wobei man sich den Tensor durch dessen Koordinaten bezüglich der Basen (1) und (2) gegeben denkt.

Bemerkung

Seien

$$v'_1,\dots,v'_n \in V$$

eine zweite Basis von V,

$$v'^1,\dots,v'^n \in V^*$$

die zugehörige duale Basis und $A = M^v_{v'}(Id) = (a^i_j)$ die Basiswechselmatrix für den Übergang von v nach v', d.h.

$$v_i = \sum_{\alpha=1}^n a^\alpha_i \, v'_\alpha \,.$$

Bezeichne $B = (b^i_j)$ die zu B inverse Matrix (d.h. die Basiswechselmatrix $B = M^{v'}_v(Id)$.

Dann gilt

$$(1) \qquad v^j = \sum_{\alpha=1}^n b^j_\alpha \, v'^\alpha$$

Für die Koordinaten eines Tensors $t \in V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$,

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r} c^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1\dots j_s} v_{i_1} \otimes\dots\otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes\dots\otimes v^{j_s} \\ &= \sum_{i_1\in J_1,\dots,i_r\in J_r} c'^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1\dots j_s} v'_{i_1} \otimes\dots\otimes v'_{i_r} \otimes v'^{j_1} \otimes\dots\otimes v'^{j_s}. \end{aligned}$$

besteht dann die folgende Relation.

$$c'^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = \sum_{\alpha_1,\beta_1\in J_1,\dots,\alpha_r,\beta_r\in J_r} a^{i_1}_{\alpha_1} \cdot\ldots\cdot a^{i_r}_{\alpha_r} b^{\beta_1}_{j_1} \cdot\ldots\cdot b^{\beta_r}_{j_r} c^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{\beta_1\dots\beta_s}$$

Beweis. Nach 1.8 reicht es (1) zu beweisen, d.h.es reicht zu zeigen, die rechte Seite von (1) genügt den definierenden Bedingungen für die duale Basis. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle v_i, \sum_{\alpha=1}^n b^j_\alpha v'^\alpha\rangle &= (\sum_{\alpha=1}^n b^j_\alpha v'^\alpha)(v_i) = (\sum_{\alpha=1}^n b^j_\alpha v'^\alpha)(\sum_{\beta=1}^n a^\beta_i v'_\beta) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n b^j_\alpha a^\beta_i v'^\alpha(v'_\beta) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} b^j_\alpha a^\beta_i \delta^\alpha_\beta$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} b^j_\alpha a^\alpha_i$$

$$= \delta^j_i$$

Damit ist (1) bewiesen, und damit die Behauptung.

QED.

Bemerkungen

(i) In der Physik betrachtet man im allgemeinen Koordinatenwechsel zwischen "krummlinigen Koordinaten", sagen wir

$$(x'^1, \dots, x'^n) = f(x^1,\dots,x^n).$$

An die Stelle der Matrix $A = (a^i_j)$ tritt dann die Matrix der Linearisierung von f,

$$a^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$$

Für die Matrix $B = A^{-1}$ gilt dann (nach der Kettenregel)

$$b^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}.$$

(ii) Einsteinsche Summenkonvention. In jedem Ausdruck, in welchen ein und derselbe Index sowohl als oberer als auch als unterer Index auftritt, wird über diesen Index summiert (maximaler Summationsbereich).

Unter Verwendung dieser Konvention hätten wir in den obigen Rechnungen sämtliche Summenzeichen weglassen können.

1.10 Die Existenz des Tensorprodukts

Für je zwei K-Vektorräume V und W existiert das Tensorprodukt.

Vorbemerkung. Wir haben gesehen, falls das Tensorprodukt $V\otimes W$ existiert, so wird es von den Tensoren $v\otimes w$ mit $v\in V$ und $w\in W$ erzeugt. Mit anderen Worten, $V\otimes W$ ist ein Faktorraum des von den Vektoren $v\otimes w$ frei erzeugten Vektoraums. Wir nutzen jetzt diese Tatsache zur Konstruktion von $V\otimes W$, d.h. wir werden $V\otimes W$ als Faktorraum eines frei erzeugten Vektorraums definieren. Anstelle der Bezeichnung $v\otimes w$ werden wir für die Elemente des frei erzeugten Vektorraum das Symbol (v,w) wählen.

Beweis. Sei M die Menge $V\times W$ der Paare (v,w) mit $v\in V$ und $w\in W$,

$$M = V\times W.$$

Betrachten wir den von M frei erzeugten K-Vektorraum

$$F(M).$$

Dieser Vektorraum besteht aus allen endlichen K-Linearkombinationen von Paaren der Gestalt (v,w) mit $v\in V$ und $w\in W$,

$$c_1\cdot(v_1,w_1) + \dots + c_r\cdot(v_r,w_r)$$

mit $c_i\in K$, $v_i\in V$, $w_i\in W$ für $i = 1,\dots,r$.

Bemerkung. Man beachte, F(M) ist unendlich-dimensional, sobald M unendlich viele Elmente enthält, d.h. selbst wenn V und W endliche Dimension haben, kann die

Dimension von F(M) unendlich sein, denn nach Konstruktion bilden die Elemente von M gerade eine Basis von F(M),

$$\dim F(M) = \# M.$$

Wir konstruieren jetzt den Unterraum R, nach den wir den Raum F(M) faktorisieren wollen. Der Raum R werde von allen Vektoren der folgenden Gestalt erzeugt.

$$((v, w' + w'') - (v,w') - (v,w'') \text{ mit } v\in V,\ w',w''\in W \tag{1}$$

$$(v' + v'', w) - (v',w) - (v'',w) \text{ mit } v',v''\in V,\ w\in W \tag{2}$$

$$(cv, w) - c(v,w) \text{ mit } c\in K,\ v\in V,\ w\in W \tag{3}$$

$$(v, cw) - c(v,w) \text{ mit } c\in K,\ v\in V,\ w\in W. \tag{4}$$

Dabei schreiben wir vereinfachend (v,w) anstelle von $1\cdot(v,w)$ und -(v,w) anstelle von $(-1)\bullet(v, w)$ für $v\in V$, $w\in W$.

<u>Bemerkung</u>. Dieser Unterraum R ist im allgemeinen ebenfalls sehr groß. Wir werden sehen, er ist so groß, daß der Faktoraum F(M)/R im Fall von endlich-dimensionalen Räumen endlich-dimensional wird.

Wir setzen

$$V\otimes W := F(M)/R.$$

Bezeichne

$$\gamma: F(M) \to F(M)/R$$

die natürliche Abbildung. Weiter setzen wir

$$v\otimes w := \gamma((v,w)).$$

Wir haben zu zeigen, die Abbildung

$$\varphi := \gamma|_{V\times W}: V\times W \to F(M)/R,\ (v,w) \mapsto \gamma((v,w)) = v\otimes w$$

ist bilinear und hat die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts.

<u>Linearität von φ bezüglich des ersten Arguments</u>. Wir haben zu zeigen

1. $\varphi(v'+v'', w) - \varphi(v',w) - \varphi(v'',w) = 0$.
2. $\varphi(cv,w) - c\cdot\varphi(v,w) = 0$.

Die linke Seite von 1. ist gleich

$$\varphi(v'+v'', w) - \varphi(v',w) - \varphi(v'',w) \quad = \gamma((v'+v'',w) - (v',w) - (v',w))$$

Das Argument von γ auf der rechten Seite ist gerade ein Element der Gestalt (2), liegt also im Unterraum R. Da der Kern von γ gerade der Unterraum R ist, steht auf der rechten Seite der Nullvektor.

Die linke Seite von 2. ist gleich

$$\varphi(cv,w) - c\cdot\varphi(v,w) = \gamma((cv,w) - c\cdot(v,w))$$

Das Argument von γ auf der rechten Seite ist gerade ein Element der Gestalt (3), liegt also im Unterraum R. Da der Kern von γ gerade der Unterraum R ist, steht auf der rechten Seite der Nullvektor.

<u>Linearität von φ bezüglich des zweiten Arguments</u>. Man verwendet dieselben Argumente wie beim Beweis der Linearität bezüglich der ersten Variablen, wobei man die Elemente der Gestalt (1) und (4) von R (anstelle der Elemente der Gestalt (2) und (3)) benutzt.

<u>Die Unversalitätseigenschaft der Abbildung φ</u>. Wir haben zu zeigen, jede K-lineare Abbildung

$$b: V\times W \to U$$

faktorisiert sich eindeutig über die Abbildung φ, d.h. zu gegebenen b gibt es genau ein lineare Abbildung $\tilde{b}$: F(M)/R $\to$ U mit

$$b(v,w) = \tilde{b}(\varphi(v,w)) \tag{5}$$

für alle $v\in V$ und alle $w\in W$.

Beweis der Eindeutigkeit von $\tilde{b}$.Nach Konstruktion bilden die Vektoren der Gestalt (v,w) ein Erzeugendensystem von F(M). Deshalb bilden die Bilder der (v,w) bei der natürlichen Surjektion

$$\gamma: F(M) \to F(M)/R$$

ein Erzeugendensystem von F(M)/R, d.h. die Elemente

$$\gamma((v,w)) = \varphi(v,w) \text{ mit } v\in V \text{ und } w\in W$$

bilden ein Erzeugendensystem von F(M)/R. Bedingung (5) (rückwärts gelesen) legt daher die Werte von $\tilde{b}$ auf einem Erzeugendensystem von F(M)/R fest. Da $\tilde{b}$ linear sein soll, ist damit die gesamte Abbildung $\tilde{b}$ festgelegt.

Bemerkungen zum weiteren Beweis-Verlauf.

(i) Zum Beweis der Existenz von $\tilde{b}$ könnten wir (5) als Definition verwenden und dann die Korrektheit der Definition beweisen. Obwohl man auf diese Weise durchaus zum Ziel kommt, wollen wir hier anders vorgehen, um die bereits bewiesenen Aussagen etwas effektiver nutzen zu können.

(ii) Aus der Existenz der Abbildung $\tilde{b}$: F(M)/R $\to$ U folgt natürlich auch die Existenz der Zusammensetzung von $\tilde{b}$ mit der natürlichen Abbildung γ:F(M) $\to$ F(M)/R. Wir werden von dieser Zusammensetzung ausgehen und mit deren Hilfe die Existenz von $\tilde{b}$ beweisen.

Beweis der Existenz von $\tilde{b}$. Betrachten wir die K-lineare Abbildung

$$b': F(M) \to U \text{ mit } (v,w) \mapsto b(v,w).$$

Da die Paare der Gestalt (v,w) eine Basis von F(M) bilden, gibt es genau eine lineare Abbildung, die für jedes $v\in V$ und jedes $w\in W$ im Basisvektor $(v,w) \in F(M)$ den vorgegebenen Wert b(v,w) annimmt.

Zum Beweis der Existenz von $\tilde{b}$ reicht es zu zeigen, der Unterraum $R\subseteq F(M)$ liegt im Kern von b',

$$R \subseteq \ker(b'), \tag{6}$$

denn auf Grund der von uns bewiesenen Universalitätseigenschaft des Faktorraums faktorisiert sich dann b' in eindeutiger Weise über die natürliche Abbildung γ:F(M)$\to$F(M)/R (vgl. die Bemerkung am Ende von 1.1),

$$b': F(M) \xrightarrow{\gamma} F(M)/R \xrightarrow{\tilde{b}'} U,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{b}'$ mit $b' = \tilde{b}'\circ\gamma$, d.h. mit

$$b(v,w) = b'((v,w)) = \tilde{b}'(\gamma(v,w)) = \tilde{b}'(\varphi(v,w)).$$

Die Abbildung

$$\tilde{b}': F(M)/R \to U, (v,w) +R \mapsto b(v,w)$$

ist somit gerade die von uns gesuchte Abbildung $\tilde{b}$.

Wir haben noch (6) zu beweisen. Dazu reicht es zu zeigen, die Abbildung b' bildet die Elemente eines Erzeugendensystems von R in die Null ab. Es genügt somit zu zeigen, daß die Elemente der Gestalt (1), (2), (3), (4) bei b' in die Null abgebildet werden. Das ist aber gerade eine Folge der Bilinearität von b. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} &b'((v, w' + w'') - (v,w') - (v,w'')) \\ &\qquad = b'(v, w' + w'') - b'(v,w') - b'(v,w'') \\ &\qquad = b(v, w' + w'') - b(v,w') - b(v,w'') \\ &\qquad = 0. \end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen besteht auf Grund der Linearität von b', das zweite nach Definition von b' und das dritte wegen der Liniearität von b bezüglich des zweiten Arguments.

QED.

Bemerkung

Im Fall endlich-dimensionaler Vektorräume V und W ist der Existenzbeweis für das Tensorprodukt einfacher. Die Definition des Tensorprodukt besagt gerade, $V\otimes W$ ist ein Vektorraum mit

$$\mathrm{Hom}_K(V\otimes W, K) = L(V,W;K).$$

Mit anderen Worten, der zu $V\otimes W$ duale Vektorraum ist gerade L(V,W,K). Da man im Fall von endlich-dimensionalen Räumen das doppelte Dual eines Vektorraum mit dem Ausgangsraum identifizieren kann, folg

$$V\otimes W = L(V,W;K)^*$$

für $\dim V < \infty$ und $\dim W < \infty$. Dies kann man im endlich-dimensionalen Fall als Definition verwenden. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß $L(V,W;K)^*$ bezüglich der bilinearen Abbildung

$$V\times W \to L(V,W; K)^*, (v,w) \mapsto (b \mapsto b(v,w))$$

tatsächlich die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts hat.

1.11 Die Funktorialität des Tensorprodukts und weitere Eigenschaften

(i) Seien $f: V\to V'$ und $g: W\to W'$ zwei A-lineare Abbildungen. Dann gibt es genau eine A-lineare Abbildung $f\otimes g$, für welche das folgenden Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccccc} V\times W & \xrightarrow{f\times g} & V'\times W' & \qquad & (v,w) \mapsto (f(v),g(w)) \\ \rho_{V,W}\downarrow & & \downarrow\rho_{V',W'} & & \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ V\otimes W & \xrightarrow{f\otimes g} & V'\otimes W' & & v\otimes w \mapsto f(v)\otimes g(w) \end{array}$$

Mit anderen Worten, $f\otimes g$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$(f\otimes g)(v\otimes w) = f(v)\otimes g(w) \text{ für } v\in V \text{ und } w\in W.$$

(ii) Für beliebige A-lineare Abbildungen $f: V\to V'$, $f':V'\to V''$, $g:W\to W'$, $g':W'\to W''$ gilt

$$(f'\otimes g')\circ(f\otimes g) = (f'\circ f)\otimes(g'\circ g).$$

(iii) Das Tensorprodukt der beiden identischen Abbildungen

$$\mathrm{Id}_V : V \to V \text{ und } \mathrm{Id}_W: W \to W$$

ist die identische Abbildung von $V\otimes W$,

$$\mathrm{Id}_V \otimes \mathrm{Id}_W = \mathrm{Id}_{V\otimes W}.$$

(iv) Seien $f: V \twoheadrightarrow V'$ und $g: W \twoheadrightarrow W'$ zwei surjektive A-lineare Abbildungen. Dann gilt:
  a) $\mathrm{Im}(f\otimes g) = V'\otimes W'$
  b) $\mathrm{Ker}(f\otimes g)$ wird erzeugt von $\{ v\otimes w \in V\otimes W \mid v \in \mathrm{Ker}(f) \text{ oder } w\in \mathrm{Ker}(g)\}$

(v) Seien $f: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von Ringen mit Eins,
  M ein A-Modul und
  N ein B-Modul.
  Dann gibt es einen B-linearen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_B(M\otimes_A B, N),\ f \mapsto (m\otimes b \mapsto b\bullet f(m)),$$

  mit der B-linearen Umkehrung

$$\mathrm{Hom}_B(M\otimes_A B, N) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_A(M, N),\ f \mapsto (m \mapsto f(m\otimes 1)).$$

Beweis. Zu (i). Da f und g linear sind und $\rho_{V',W'}$ bilinear ist, ist die Zusammensetzung

$$\rho_{V',W'}\circ(f\times g)$$

bilinear. Die Existenz und Eindeutigkeit von $f\otimes g$ folgt deshalb aus der Universalitätseigenschaft von $\rho_{V,W}$.

Zu (ii). Für $v\in V$ und $w\in W$ gilt

$$\begin{aligned}((f'\otimes g')\circ(f\otimes g))(v\otimes w) &= (f'\otimes g')(f(v)\otimes g(w))\\ &= f'(f(v))\otimes g'(g(w))\\ &= (f'\circ f(v))\otimes(g'\circ g(w))\\ &= ((f'\circ f)\otimes(g'\circ g))(v\otimes w).\end{aligned}$$

Die beiden linearen Abbildungen $(f'\otimes g')\circ(f\otimes g)$ und $(f'\circ f)\otimes(g'\circ g)$ haben für alle Vektoren der Gestalt $v\otimes w$ mit $v\in V$ und $w\in W$ denselben Wert. Da die $v\otimes w$ ein Erzeugendensystem von $V\otimes W$ bilden, folgt

$$(f'\otimes g')\circ(f\otimes g) = (f'\circ f)\otimes(g'\circ g).$$

Zu (iii). Für $v\in V$ und $w\in W$ gilt

$$(\mathrm{Id}_V\otimes \mathrm{Id}_W)(v\otimes w) = (\mathrm{Id}_V(v))\otimes(\mathrm{Id}_W(w)) = v\otimes w,$$

d.h. die lineare Abbildung $\mathrm{Id}_V\otimes\mathrm{Id}_W$ hat auf allen Vektoren des Erzeugendensystems

$$\{v\otimes w\}_{v\in V, w\in W}$$

dieselben Werte wie die identische Abbildung $\mathrm{Id}_{V\otimes W}$. Deshalb gilt

$$\mathrm{Id}_V\otimes\mathrm{Id}_W = \mathrm{Id}_{V\otimes W}.$$

Zu (iv) Sei $T \subseteq V\otimes W$ der von den Elementen der Menge

$$X := \{ v\otimes w \in V\otimes W \mid v \in \mathrm{Ker}(f) \text{ oder } w\in\mathrm{Ker}(g)\}$$

erzeugte A-Teilmodul von $V\otimes W$. Für $v\otimes w \in X$ gilt

$$(f\otimes g)(v\otimes w) = f(v)\otimes g(w) = 0,$$

also $v\otimes w \in \mathrm{Ker}(f\otimes g)$, also

$$T \subseteq \mathrm{Ker}(f\otimes g). \tag{1}$$

Wir haben die umgekehrt Inklusion zu beweisen Wegen (1) faktorisiert sich

$$f\otimes g: V\otimes W \longrightarrow V'\otimes W'$$

über $V\otimes W/T$:

$$f\otimes g: V\otimes W \xrightarrow{\rho} V\otimes W/T \xrightarrow{\tilde\rho} V'\otimes W'.$$

Dabei sei ρ die natürliche Surjektion auf den Faktormodul und $\tilde\rho$ die A-lineare Abbildung mit

$$\tilde\rho(v\otimes w \bmod T) = f(v)\otimes g(w) \text{ für beliebige } v \in V \text{ und } w\in W.$$

Zum Beweis des Gleichheitszeichens in (1) reicht es zu zeigen, daß $\tilde\rho$ bijektiv ist. Aus der Bijektivität von $\tilde\rho$ ergibt sich außerdem, daß $f\otimes g$ als Zusammensetzung der surjektiven Abbildungen ρ und $\tilde\rho$ surjektiv ist, d.h. es gilt auch Aussage a).

Betrachten wir die Abbildung

$$V' \times W' \longrightarrow V\otimes W/T,\ (v', w') \mapsto v\otimes w \bmod T. \tag{2}$$

Dabei seien die Elemente $v\in V$ und $w\in W$ so gewählt, daß

$$f(v) = v' \text{ un } g(w) = w'$$

gilt. Wir haben zu zeigen, daß diese Definition korrekt ist, d.h. daß sie nicht von der speziellen Wahl der Elemente v und w abhängt. Sei $v_1\in V$ und $w_1\in W$ ein weiterers Paar von Elementen mit

$$f(v_1) = v' \text{ und } g(w_1) = w'.$$

Dann gilt

$$f(v_1-v) = 0 \text{ und } g(w_1-w) = 0$$

also

$$v_1-v \in \mathrm{Ker}(f) \text{ und } w_1-w \in \mathrm{Ker}(g)$$

also

$$v_1\otimes w_1 - v\otimes w = (v_1-v)\otimes w_1 + v\otimes(w_1-w) \in T$$

also $v_1\otimes w_1 \bmod T = v\otimes w \bmod T$.

Die Abbildung (2) ist also korrekt definiert. Nach Konstruktion ist sie bilinear über A, induziert also eine A-lineare Abbildung

$$V' \otimes W' \longrightarrow V\otimes W/T,\ (v', w') \mapsto v\otimes w \bmod T. \tag{3}$$

Ein Vergleich mit der Abbildungsvorschrift von $\tilde\rho$ zeigt, daß (3) invers ist zu $\tilde\rho$. Deshalb ist $\tilde\rho$ ein Isomorphismus, und es gilt

$$\mathrm{Ker}(f\otimes g) = \mathrm{Ker}(\rho) = T.$$

Es gilt b) und wie schon erwähnt auch a).

<u>Zu (v)</u>. <u>Existenz der</u> B-<u>linearen Abbildung</u> $\varphi: \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_B(M\otimes_A B, N)$

$$\text{mit } \varphi(f)(m\otimes b) = b\bullet f(m)).$$

Sei $f: M \longrightarrow N$ eine A-lineare Abbildung. Dann ist die Abbildung

$$M \times B \longrightarrow N, (m, b) \mapsto b\bullet f(m),$$

wohldefiniert (weil N ein B-Modul ist) und bilinear über A. Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts induziert diese Abbildung eine A-lineare Abbildung

$$M\otimes_A B \longrightarrow N, m\otimes b \mapsto b\bullet f(m).$$

An der Abbildungsvorschrift liest man ab, die Abbildung ist sogar B-linear.

Die Abbildung ψ ist wohldefiniert und B-linear.

Als Abbildung mit Werten in $Hom_{Ens}(M, N)$ ist ψ wohldefiniert. Für jedes

$$f \in Hom_B(M\otimes_A B, N)$$

und beliebige $m,m'\in M$ und $a \in A$ gilt

$$\begin{aligned} \psi(f)(a\bullet m + m') &= f((a\bullet m+m')\otimes 1) \\ &= f(a\bullet m\otimes 1 + m'\otimes 1) \quad \text{('$\otimes$' ist bilinear über A)} \\ &= a\bullet f(m) + f(m') \quad \text{(f ist B-linear).} \end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung $\psi(f)$ linear über A, also eine Abbildung

$$Hom_B(M\otimes_A B, N) \longrightarrow Hom_A(M, N).$$

An der Abbildungsvorschrift liest man ab, daß ψ eine B-lineare Abbildung ist.

Es gilt $\psi\circ\varphi = Id$.

Für beliebige f aus dem Definitionsbereich von φ und beliebige $m \in M$ gilt

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(f))(m) &= \varphi(f)(m\otimes 1) \quad \text{(nach Definition von ψ)} \\ &= 1\bullet f(m) \\ &= f(m) \end{aligned}$$

also

$$\psi(\varphi(f)) = f$$

also

$$\psi\circ\varphi = Id.$$

Es gilt $\varphi\circ\psi = Id$.

Für beliebige f aus dem Definitionsbereich von ψ, beliebige $m \in M$ und $b \in B$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(f))(m\otimes b) &= b\bullet\psi(f)(m) \quad \text{(nach Definitoin von φ)} \\ &= b\bullet f(m\otimes 1) \quad \text{(nach Definition von ψ)} \\ &= f(b\bullet m\otimes 1) \quad \text{(f ist B-linear)} \\ &= f(m\otimes b) \quad \text{(nach Definition der B-Modul-Struktur von $M\otimes_A B$)} \end{aligned}$$

also

$$\varphi(\psi(f)) = f,$$

also

$$\psi\circ\varphi = Id.$$

QED.

1.12 Additive Kategorien und Funktoren

Eine Kategorie C heißt additiv, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Für je zwei Objekte X', X'' von C existiert deren direkte Summe, d.h. ein Objekt X zusammen mit zwei Morphismen

$$i': X' \longrightarrow X \text{ und } i'': X'' \longrightarrow X$$

mit der Eigenschaft, daß es für beliebige Morphismen

$$j': X' \longrightarrow Y \text{ und } j'': X'' \longrightarrow Y$$

genau einen Morphismus $f:X \longrightarrow Y$ gibt, für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[dr, "j'"'] & X \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[l, "i''"'] \arrow[dl, "j''"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.[4] Mit anderen Worten, die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X', Y) \times \mathrm{Hom}(X'', Y),\ f \mapsto (f \circ i', f \circ i'')$$

soll für jedes Objekt Y von C bijektiv sein.
Die Morphismen i', i" heißen dann die <u>natürlichen Injektionen</u> der direkten Summe X.

2. Für je zwei Objekte X', X" von C existiert deren <u>direktes Produkt</u>, d.h. ein Objekt X zusammen mit zwei Morphismen

$$p': X \longrightarrow X' \text{ und } p'': X \longrightarrow X''$$

mit der Eigenschaft, daß es für beliebige Morphismen

$$q': Y \longrightarrow X' \text{ und } q'': Y \longrightarrow X''$$

genau einen Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ gibt, für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' & X \arrow[l, "p'"'] \arrow[r, "p''"] & X'' \\ & Y \arrow[ul, "q'"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "q''"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.[5] Mit anderen Worten, die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, X') \times \mathrm{Hom}(Y, X'');\ f \mapsto (p' \circ f, p'' \circ f)$$

soll für jedes Objekt Y von C bijektiv sein.
Die Morphismen p', p" heißen dann die <u>natürlichen Projektionen</u> des direkten Produkts X.

3. Für je zwei Objekte X und Y von C besitzt $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ die Struktur einer (additiven) abelschen Gruppe, wobei die Morphismen-Komposition

$$\mathrm{Hom}_C(X, Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(X, Z),\ (f, g) \mapsto g \circ f,$$

für je drei Objekte X, Y, Z $\mathbb{Z}$-bilinear in f und g ist (d.h. es gelten die Distributivgesetze).[6]

4. Es gibt ein Objekt O von C mit $1_O = 0$.[7] Es wird <u>Null-Objekt</u> genannt.

---

[4] Im Fall der Kategorie A-Mod der A-Moduln kann man $X = X' \oplus X''$ setzen und für i', i" die natürlichen Einbettungen verwenden. Die Abbildung f ist dann gegeben durch

$$f((x', x'')) = f((x',0) + (0,x'')) = f((x',0)) + f((0, x'')) = f(i'(x')) + f(i''(x'')) = j'(x') + j''(x'').$$

[5] Im Fall der Kategorie A-Mod kann man $X = X' \oplus X''$ setzen und für p', p" die natürlichen Projektionen verwenden. Die Abbildung f ist dann gegeben durch

$$f(y) = (f'(y), f''(y))$$
$$f'(y) = p'(f(y)) = q'(y)$$
$$f''(y) = p''(f(y)) = q''(y),$$

also

$$f(y) = (q'(y), q''(y)),$$

d.h. q' und q" sind gerade die Koordinatenfunktionen von f.

[6] Die Hom-Mengen von A-Mod sind sogar A-Moduln und die Morphismen-Komposition ist bilinear über A.

[7] Ein A-Modul X, für welchen der identische Morhismus gleich dem 0-Morphismus ist, ist gleich dem trivialen Modul 0.

Ein Funktor

$$F: C \longrightarrow D$$

von abelschen Kategorien C, D heißt <u>additiv</u>, wenn für je zwei Objekte X,X' von C die Abbildung

$$F: \mathrm{Hom}(X, X') \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), F(X')),\ f \mapsto F(f),$$

ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Bemerkungen

(i) Je zwei 0-Objekte sind isomorph.

(ii) Ist O ein Nullobjekt, so sind die Hom-Mengen Hom(O,X) und Hom(X,O) für jedes Objekt X einelementig,

$$\mathrm{Hom}(O,X) = \{0_{OX}\}$$
$$\mathrm{Hom}(X,O) = \{0_{XO}\}$$

(iii) Ein Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ ist genau dann eine Null-Morphismus (d.h. das neutrale Element von Hom(X,Y)), wenn sich f über ein Nullobjekt faktorisiert,

$$f: X \longrightarrow O \longrightarrow Y.$$

(iv) Für je drei Objekte X_0, X_1, X von C sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) X ist direkte Summe der X_α , $\alpha = 0,1$.

(b) X ist direktes Produkt der X_α , $\alpha = 0,1$.

(c) Es gilt Morphismen $p_\alpha: X \longrightarrow X_\alpha$ und $i_\alpha: X_\alpha \longrightarrow X$ ($\alpha = 0,1$) mit

1. $p_\alpha i_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ für $\alpha, \beta \in \{0,1\}$
2. $1_X = i_0p_0 + i_1p_1$

(v) Ein additiver Funktor überführt direkte Summen in direkte Summen und direkte Produkte in direkte Produkte.

(vi) Das Bild eines 0-Objekts bei einem additiven Funktor ist ein 0-Objekt.

Beweis. <u>Zu</u> (i). Seien X und Y zwei 0-Objekte und $0_{XY}: X \longrightarrow Y$ und $0_{YX}: Y \longrightarrow X$ die neutralen Elemente der entsprechenden Hom-Mengen. Dann gilt wegen der Bilinearität der Morphismen-Komposition

$$0_{XY}\circ 0_{YX} = 0_Y = 1_X \text{ und } 0_{YX}\circ 0_{XY} = 0_Y = 1_Y ,$$

d.h. 0_{XY} und 0_{YX} sind zueinander inverse Morphismen, also Isomorphismen.

<u>Zu</u> (ii). Sei $f \in \mathrm{Hom}(O, X)$. Wir betrachten die Zusammansetzeung

$$O \xrightarrow{1_O} O \xrightarrow{f} X.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f &= f\circ 1_O \\ &= f\circ 0_{OO} && \text{(weil O ein Nullobjekt ist, gilt } 1_O = 0_{OO}\text{)} \\ &= 0_{OX} && \text{(die Morphismen-Komposition ist bilinear).} \end{aligned}$$

Sei $g \in \mathrm{Hom}(X, O)$. Wir betrachten die Zusammensetzung

$$X \xrightarrow{g} O \xrightarrow{1_O} O.$$

Es gilt

$$g = 1_O\circ g$$

$= 0_{OO}\circ g$ (weil O ein Nullobjekt ist, gilt $1_O = 0_{OO}$)

$= 0_{XO}$ (die Morphismen-Komposition ist bilinear).

<u>Zu</u> (iii). Angenommen, f faktorisiert sich über ein Nullobjekt O, d.h. es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \\ & O \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Dann gilt nach (ii) $\alpha\in\mathrm{Hom}(X,O) = \{0_{XO}\}$ also $\alpha = 0_{XO}$, also

$$f = \beta\circ\alpha = \beta\circ 0_{XO} = 0_{XY}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil die Morphismen-Komposition bilinear ist.
Nehmen wir umgekehrt an, f ist ein Null-Morphismus,

$$f = 0_{XY}.$$

Bezeichne O irgendein Nullobjekt. Weil die Morphismen-Komposition bilinear ist, gilt

$$0_{OY}\circ 0_{XO} = 0_{XY} = f,$$

d.h. f faktorisiert sich über O.

<u>Zu</u> (iv). <u>(a) ⇒ (c)</u>. Seien $i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ die natürlichen Injektionen der direkten Summe X. Dann gibt es Morphismen $p_\alpha: X \longrightarrow X_\alpha$, $\alpha=0,1$, für welche die folgenden Diagramme kommutativ sind.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "1_{X_\alpha}"'] & X \arrow[d, "p_\alpha"] & X_\beta \arrow[l, "i_\beta"'] \arrow[dl, "0_{X_\beta}"] \\ & X_\alpha & \end{tikzcd}$$

für α, β=0,1 und $\alpha+\beta = 1$.

Mit anderen Worten, die Bedingungen 1 sind erfüllt. Wir haben noch zu zeigen, die Bedingung 2 ist ebenfalls erfüllt.

Auf Grund der Definition der direkten Summe ist für jedes Objekt Y die folgende Abbildung bijektiv.

$$\mathrm{Hom}_C(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(X_0, Y) \times \mathrm{Hom}_C(X_1, Y),\ f \mapsto (f\circ i_0, f\circ i_1).$$

Zum Beweis der Identität von 2 reicht es somit, wenn wir zeigen, es gelten die Identitäten,

$$i_\alpha = i_\alpha p_\alpha i_\alpha + i_\beta p_\beta i_\alpha \text{ für } \alpha, \beta\text{=0,1 und } \alpha+\beta = 1.$$

welche aus der Identität 2 durch Zusammensetzen mit den i_α entstehen. Auf Grund der Bedingungen 1 gilt aber

$$i_\alpha p_\alpha i_\alpha = i_\alpha 1_{X_\alpha} = 1_\alpha \text{ und } i_\beta p_\beta i_\alpha = i_\beta 0_{X_\beta X_\alpha} = 0_{XX_\alpha}$$

Damit ist auch Bedingung 2 erfüllt.

<u>(c) ⇒ (a)</u>. Wir haben die Bijektivität der Abbildung

$$\varphi:\mathrm{Hom}_C(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(X_0, Y) \times \mathrm{Hom}_C(X_1, Y),\ f \mapsto (f\circ i_0, f\circ i_1).$$

zu beweisen (für jedes Objekt Y von C). Dazu reicht es zu zeigen, die folgende Abbildung ist invers zu φ.

$$\psi:\mathrm{Hom}_C(X_0, Y) \times \mathrm{Hom}_C(X_1, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(X, Y), (f, g) \mapsto f\circ p_0 + g\circ p_1.$$

Für jeden Morphismus u: $X \longrightarrow Y$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi(u)) &= \psi((u\circ i_0, u\circ i_1)) \\
&= u\circ i_0\circ p_0 + u\circ i_1\circ p_1 \\
&= u\circ(i_0\circ p_0 + i_1\circ p_1) \\
&= u\circ 1 && \text{(wegen Bedingung 2)} \\
&= u
\end{aligned}$$

Also gilt $\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}$. Weiter gilt für beliebige f: $X_0 \longrightarrow Y$ und g: $X_1 \longrightarrow Y$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\psi(f,g)) &= \varphi(f\circ p_0 + g\circ p_1) \\
&= ((f\circ p_0 + g\circ p_1)\circ i_0, (f\circ p_0 + g\circ p_1)\circ i_1) \\
&= (f\circ p_0\circ i_0 + g\circ p_1\circ i_0, f\circ p_0\circ i_1 + g\circ p_1\circ i_1) \\
&(f, g) && \text{(wegen der Bedingungen 1).}
\end{aligned}$$

Die Abbildungen φ und ψ sind also zueinander inverse Bijektionen.

(b) $\Leftrightarrow$ (c). Die zu einer additiven Kategorie duale Kategorie ist ebenfalls additiv. Die bereits bewiesenen Aussagen gelten somit für die zu C duale Kategorie ebenfalls. Direkte Summen bzw. Produkte werden aber in der dualen Kategorie zu direkten Produkten bzw. Summen. Mit (a) $\Leftrightarrow$ (c) gilt somit auch (b) $\Leftrightarrow$ (c).

Zu (v). Die Bedingungen von (ii)(c) bleiben erhalten, wenn man einen additiven Funktor anwendet.

Zu (vi). Sei X ein Nullobjekt, d.h. es gelte

$$1_X = 0_X \text{ in } \mathrm{Hom}_C(X, X).$$

Für jeden auf C definierten Funktor F ist

$$F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

Ist F additiv, so ist

$$\mathrm{Hom}\,(X, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), F(X)),\ f \mapsto F(f),$$

ein Gruppen-Homomorphismus. Insbesondere gilt dann

$$F(0_X) = 0_{F(X)}.$$

Zusammen ergibt sich

$$1_{F(X)} = F(1_X) = F(0_X) = 0_{F(X)},$$

d.h. F(X) ist ein 0-Objekt.

QED.

1.13 Exake Funktoren von Modul-Kategorien und flache Moduln

Eine exakte Sequenz von A-Moduln und linearen Abbildungen ist eine Folge von A-linearen Abbildungen

$$\ldots \to V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_{i+2} \to \ldots \qquad (1)$$

mit

$$\mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1} \text{ für alle i.}$$

Falls diese Gleichheit nur für ein gegebenes i gilt, so sagt man die Sequenz ist exakt an der Stelle V_{i+1}. Ein Funktor

$$F: A\text{-Mod} \longrightarrow B\text{-Mod}$$

heißt exakt, wenn er additiv ist und für jede exakte Sequenz (1) von A-Moduln die zugehörige Sequenz

$$\ldots \to F(V_i) \xrightarrow{F(f_i)} F(V_{i+1}) \xrightarrow{F(f_{i+1})} F(V_{i+2}) \to \ldots$$

von B-Moduln exakt ist. Ein A-Modul U heißt flach, falls der Funktor $U\otimes_A$ exakt ist.

Beispiel 1
Die Sequenz von linearen Abbildungen

$$0 \to V' \xrightarrow{f'} V \xrightarrow{f''} V'' \to 0$$

ist genau dann exakt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.
1. f' ist injektiv (Exaktheit an der Stelle V')
2. Im f' = Ker f'' (Exaktheit an der Stelle V)
3. f'' ist surjektiv (Exaktheit an der Stelle V'').

Man spricht in dieser Situation von einer kurzen exakten Sequenz.

Bemerkung
Sei U ein A-Modul U. Dann ist der Funktor

$$U\otimes_A: \text{A-Mod} \longrightarrow \text{A-Mod}, M \mapsto U\otimes_A M,$$

additiv: für beliebige A-Moduln V und W ist die Abbildung

$$\varphi:\mathrm{Hom}_A(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(U\otimes_A V, U\otimes_A W), V \xrightarrow{f} W \mapsto U\otimes_A V \xrightarrow{Id\otimes f} U\otimes_A W,$$

ein Gruppen-Homomorphismus: für $u\in U$ und $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(f'+f'')(u\otimes v) &= (Id\otimes(f'+f''))(u\otimes v)\\ &= Id(u)\otimes(f'+f'')(v)\\ &= Id(u)\otimes(f'(v)+f''(v))\\ &= Id(u)\otimes f'(v)+Id(u)\otimes f''(v)\\ &= \varphi(f')(u\otimes v) + \varphi(f'')(u\otimes v)\\ &= (\varphi(f') + \varphi(f''))(u\otimes v)\end{aligned}$$

Damit gilt $\varphi(f'+f'') = \varphi(f') + \varphi(f'')$, d.h. φ ist ein Gruppen-Homomorphismus.

Beispiel 2
Die Sequenz

$$0 \to V' \xrightarrow{f'} V'\oplus V'' \xrightarrow{f''} V'' \to 0$$

mit $f'(v') = (v', 0)$ und $f''(v', v'') = v''$ ist eine kurze exakte Sequenz:

$$\mathrm{Ker}(f'') = \{(v', 0) \mid v' \in V'\} = \mathrm{Im}(f').$$

Beispiel 3
Für jeden A-Moduln V und jeden A-Teilmodul $U \subseteq V$ ist

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\rho} V/U \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Dabei seien $i: U \hookrightarrow V$ die natürliche Einbettung und $\rho:V\longrightarrow V/U$, $v \mapsto (v \bmod U)$, die natürliche Abbildung auf den Faktorraum.

1.14 Kriterium füx exake Funktoren

Seien A und B kommutative Ringe mit 1 und

$$F: A\text{-Mod} \longrightarrow B\text{-Mod}$$

ein additiver Funktor. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) F ist exakt.

(ii) Für jede kurze exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \to V' \xrightarrow{f'} V \xrightarrow{f''} V'' \to 0$$

ist die zugehörige Sequenz von B-Moduln

$$0 \to F(V') \xrightarrow{f'} F(V) \xrightarrow{f''} F(V'') \to 0$$

exakt.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Weil F kurze exakte Sequenzen in kurze exakte Sequenzen überführt, gilt insbesondere[8]

F(f) injektiv für f injektiv und
F(f) surjektiv für f surjektiv.

Sei eine exakte Sequenz von A-Moduln gegeben:

$$\ldots \to V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_{i+2} \to \ldots \qquad (1)$$

Wir zerlegen f_i und f_{i+1} jeweils in eine Surjektion und eine Injektion:

$$f_i = \alpha_{i+1} \circ \beta_i : V_i \overset{\beta_i}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1}) \overset{\alpha_{i+1}}{\rightarrowtail} V_{i+1}$$

$$f_{i+1} = \alpha_{i+2} \circ \beta_{i+1} : V_{i+1} \overset{\beta_{i+1}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(f_{i+1}) = \mathrm{Ker}(f_{i+2}) \overset{\alpha_{i+2}}{\rightarrowtail} V_{i+2}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) &= \mathrm{Im}(f_i) && \text{(Surjektivität von } \beta_i\text{)} \\ &= \mathrm{Ker}(f_{i+1}) && \text{(Exaktheit von (1))} \\ &= \mathrm{Ker}(\beta_{i+1}) && \text{(Injektivität von } \alpha_{i+2}\text{),} \end{aligned}$$

d.h. es besteht eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_{i+1}) \xrightarrow{\alpha_{i+1}} V_{i+1} \xrightarrow{\beta_{i+1}} \mathrm{Im}(f_{i+1}) \longrightarrow 0.$$

Nach Vorausetzung ist damit die Sequenz

$$0 \longrightarrow F(\mathrm{Ker}(f_{i+1})) \xrightarrow{F(\alpha_{i+1})} F(V_{i+1}) \xrightarrow{F(\beta_{i+1})} F(\mathrm{Im}(f_{i+1})) \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

exakt. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(F(f_{i+1})) &= \mathrm{Ker}(F(\alpha_{i+2}) \circ F(\beta_{i+1})) && \text{(wegen } f_{i+1} = \alpha_{i+2} \circ \beta_{i+1}\text{)} \\ &= \mathrm{Ker}(F(\beta_{i+1})) && \text{(Injektivität von } F(\alpha_{i+2})\text{)} \\ &= \mathrm{Im}(F(\alpha_{i+1})) && \text{(Exaktheit von (2) an der Stelle } F(V_i)\text{)} \end{aligned}$$

---

[8] Für jedes injektive $f:V \longrightarrow W$ ist $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \longrightarrow V/\mathrm{Im}(f) \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz.

Für jedes surjektive $f:V \longrightarrow W$ ist $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz.

$$= \mathrm{Im}(F(\alpha_{i+1})\circ F(\beta_i)) \quad \text{(Surjektivitiät von } F(\beta_i))$$
$$= \mathrm{Im}(F(f_i)) \quad \text{(wegen } f_i = \alpha_{i+1}\circ\beta_i)$$

Damit ist die Bild-Sequenz exakt an der Stelle $F(V_{i+1})$ (für jedes i).

QED.

Beispiel 1
Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Dann ist der Funktor

$$A\otimes_A: A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod},\ M \mapsto A\otimes_A M,$$

exakt. Für jede kurze exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

erhält man durch Anwenden von $A\otimes_A$ ein kommutatives Diagramm von A-Moduln

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\otimes M' \arrow[r, "id\otimes f"] \arrow[d, "\varphi'"] & A\otimes M \arrow[r, "id\otimes g"] \arrow[d, "\varphi"] & A\otimes M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a\otimes m' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a\otimes f(m'), \arrow[d, mapsto] & a\otimes m \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a\otimes g(m) \arrow[d, mapsto] \\
am' \arrow[r, mapsto] & f(am'), & am \arrow[r] & g(am)
\end{tikzcd}$$

Dabei seinen die vertikalen Abbildungen die Isomorphismen $a\otimes m \mapsto am$. Mit der unteren Zeile ist dann auch die obere Zeile exakt.

Beispiel 2
Seien A ein kommuttiver Ring mit 1 und $M = \oplus_{i\in I} A$ ein freier A-Modul. Dann ist der Funktor

$$M\otimes_A: A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod},\ N \mapsto M\otimes_A N,$$

exakt, d.h. freie A-Moduln sind flach.

Beweis. Für jeden A-Modul N ist

$$M\otimes_A N \ = \ (\oplus_{i\in I} A)\otimes_A N \ \overset{9}{=} \ \oplus_{i\in I} A\otimes_A N \ = \oplus_{i\in I} N$$

$$\sum_j \{a_{ij}\}_{i\in I}\otimes n_j \mapsto \sum_j \{a_{ij}\otimes n_j\}_{i\in I} \mapsto \sum_j \{a_{ij}n_j\}_{i\in I}$$

eine direkte Summe von Exemplaren von M. Für jede A-lineare Abbildung

$$f: N \longrightarrow N'$$

ist

$$id\otimes_A f: M\otimes_A N \longrightarrow M\otimes_A N',\ m\otimes n \mapsto m\otimes f(n)$$

als Abbildung

$$\oplus_{i\in I} N \longrightarrow \oplus_{i\in I} N',$$

von der Gestalt

$$\{n_i\}_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} 1\otimes n_i \mapsto \sum_{i\in I} 1\otimes f(n_i) \mapsto \{f(n_i)\}_{i\in I},$$

d.h. eine direke Summe von Exemplaren von f.[10] Deshalb gilt

---

[9] Die Funktoren $\otimes$ und $\oplus$ kommutieren (vgl. 1.5 (iv)).
[10] Auf jede Koordinate von $\oplus_{i\in I} N$ wird f angewandt.

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}\otimes_A f) = \oplus_{i\in I} \mathrm{Ker}(f) \text{ und } \mathrm{Im}(\mathrm{id}\otimes_A f) = \oplus_{i\in I} \mathrm{Im}(f)$$

Für jede exakte Sequenz von A-Moduln

$$\ldots \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \ldots$$

und die zugehörige Sequenz

$$\ldots \longrightarrow M\otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} M\otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g} M\otimes_A M'' \longrightarrow \ldots$$

gilt dann

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}\otimes g) = \oplus_{i\in I} \mathrm{Ker}(g) = \oplus_{i\in I} \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}\otimes f),$$

d.h. auch die tensorierte Sequenz ist exakt.
QED.

1.15 Halbexaktheit des Tensorprodukts

Für jede exakte Sequenz von A-Moduln

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

und jeden A-Modul N ist die zugehörige Sequenz

$$M'\otimes N \xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}} M\otimes N \xrightarrow{g\otimes\mathrm{id}} M''\otimes N \longrightarrow 0$$

exakt. Man sagt deshalb auch, das Tensorprodukt ist <u>rechtsexakt</u>.

Ist A ein Körper, so ist der Funktor $\otimes_A N$ sogar exakt, d.h. für Körper A ist jeder A-Modul N flach.

Beweis. <u>Exaktheit an der Stelle</u> $M''\otimes N$. Die Aussage folgt aus 1.11 (iv) a): Surjektionen gehen beim Tensorieren in Surjektionen über.

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $M\otimes N$. Für $m'\in M'$ und $n\in N$ gilt

$$\begin{aligned}(g\otimes\mathrm{id})\circ(f\otimes\mathrm{id})(m'\otimes n) &= (g\otimes\mathrm{id})(f(m')\otimes n)\\ &= g(f(m))\otimes n\\ &= 0\otimes n\\ &= 0,\end{aligned}$$

also

$$\mathrm{Im}(f\otimes\mathrm{id}) \subseteq \mathrm{Ker}(g\otimes\mathrm{id}).$$

Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen, d.h.

$$\mathrm{Ker}(g\otimes\mathrm{id}) \subseteq \mathrm{Im}(f\otimes\mathrm{id}).$$

Wegen 1.11 b) reicht es zu zeigen, für

$$m \in \mathrm{Ker}(g) \text{ und } n\in N$$

gilt

$$m\otimes n \in \mathrm{Im}(f\otimes\mathrm{id}).$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Deshalt gibt es ein $m'\in M'$ mit $m = f(m')$, also

$$m\otimes n = f(m')\otimes\mathrm{id}(n) = (f\otimes\mathrm{id})(m'\otimes n) \in \mathrm{Im}(f\otimes\mathrm{id}).$$

Damit ist die Exaktheit an der Stelle $M\otimes N$ bewiesen.
<u>Die Flachheit von</u> N <u>im Fall eines Körpers</u> A. Ist A ein Körper, so besitzt N über A eine Basis, d.h. N ist ein freier A-Modul. Nach Beispiel 2 von 1.14 sind freie Moduln flach.
QED.
Beispiel 1.

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Dann besteht ein Isomorphismus von A-Moduln

$$M\otimes_A(A/I) \xrightarrow{\cong} M/IM$$

$$m\otimes(a \bmod I) \mapsto am \bmod IM.$$

Insbesondere ist für jedes Ideal I von A der Funktor

$$A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod},\ M \mapsto M/IM$$

rechtsexakt.

Beweis. Zeigen wir, M/IM besitzt die Universaltiätseigenschaft von

$$M\otimes_A(A/I)$$

Die Abbildung

$$b: M\times(A/I) \longrightarrow M/IM,\ (m, a \bmod I) \mapsto am \bmod IM,$$

ist wohldefiniert: für $a' \in A$ mit $a' \bmod I = a \bmod I$ gilt $a'-a \in I$, also

$$a'\bullet m - a\bullet m \in IM,$$

also

$$a'\bullet m \bmod IM = a\bullet m \bmod IM.$$

Wir haben gezeigt, die Abbildung b ist wohldefiniert. Aus der Definition liest man ab, daß b bilinear über A ist. Sei jetzt

$$b': M\times(A/I) \longrightarrow N$$

eine beliebige bilineare Abbildung von A-Moduln. Wir haben zu zeigen, b' faktorisiert sich auf genau eine Weise über b, d.h. b' hat die Gestalt

$$b':\ M\times(A/I) \xrightarrow{b} M/IM \xrightarrow{\tilde{b}'} N$$

mit einer eindeutig bestimmten A-linearen Abbildung $\tilde{b}'$.

<u>Eindeutigkeit von</u> $\tilde{b}'$. Existiert $\tilde{b}'$, so gilt für jedes $m\in M$

$$\tilde{b}'(m \bmod IM) = \tilde{b}'(b(m, 1 \bmod I) = b'(m, 1 \bmod I),$$

d.h. $\tilde{b}'$ ist durch b eindeutig festgelegt.

<u>Existenz von</u> $\tilde{b}'$. Wir setzen

$$\tilde{b}'(m \bmod IM) := b'(m, 1 \bmod I) \text{ für jedes } m \in M.$$

Diese Definition ist korrekt, denn für jedes $m_0 \in M$ mit

$$m \bmod IM = m_0 \bmod IM$$

gilt

$$m_0 - m \in IM,$$

d.h. es gibt Elemente $a_1, \dots, a_r \in I$ und $m_1, \dots, m_r \in M$ mit

$$m_0 - m = \sum_{i=1}^{r} a_i m_i .$$

Also ist

$$\begin{aligned} b'(m, 1) - b(m_0, 1) &= b'(m-m_0,1) && \text{(b' ist bilinear)} \\ &= b'(\sum_{i=1}^{r} a_i m_i , 1 \bmod I\,) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i b'(m_i, 1 \bmod I) \qquad \text{(b' ist bilinear)}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} b'(m_i, a_i \bmod I) \qquad \text{(b' ist bilinear)}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} b'(m_i, 0) \qquad (a_i \in I \text{ für jedes } i)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} b'(m_i, 0\bullet 0)$$
$$= 0\bullet \sum_{i=1}^{r} b'(m_i, 0) \qquad \text{(b' ist bilinear)}$$
$$= 0.$$

Damit ist gezeigt, daß $\widetilde{b}'$ korrekt definiert ist. Nach Definition ist $\widetilde{b}'$ eine A-lineare Abbildung mit

$$\widetilde{b}'(b(m, a)) = \widetilde{b}'(a\bullet m \bmod IM) \qquad \text{(nach Definition von b)}$$
$$= b'(am, 1) \qquad \text{(nach Definition von } \widetilde{b}'\text{)}$$
$$= a\bullet b'(m, 1) \qquad \text{(b ist A-bilinear)}$$
$$= b'(m,a) \qquad \text{(b ist A-bilinear)}$$

Dies gilt für beliebige $m \in M$ und $a \in A$. Deshalb ist

$$\widetilde{b}'\circ b = b',$$

wie gefordert.

Wir haben gezeigt, wir können M/IM mit dem Tensorprodukt $M\otimes_A A/I$ identifizieren.

Bei dieser Identifikation ist $m\otimes(a \bmod I)$ gerade das Element

$$b(m, a \bmod I) = am \bmod IM.$$

QED.

Beispiel 2

Seien A ein kommuttiver Ring mit 1 und $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge. Dann ist der Funktor

$$S^{-1}A\otimes_A: A\text{-Mod} \longrightarrow S^{-1}A\text{-Mod}, N \mapsto S^{-1}A\otimes_A N,$$

exakt, d.h. $S^{-1}A$ ist flach über A.

Beweis. 1.Schritt: Definition des Moduls $S^{-1}M$

Für jeden A-Modul N definieren wir den Quotienten-Modul von N bezüglich S als

$$S^{-1}M := \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S\}$$

Dabei werden zwei Quotienten $\frac{m}{s}$ und $\frac{m'}{s'}$ genau dann als gleich angesehen, wenn es ein $t \in S$ gibt mit

$$t\bullet(s'\bullet m - s\bullet m') = 0. \qquad (1)$$

Durch (1) ist eine Äquivalenz-Relation von Paaren (m, s) und (m',s') aus $M\times S$ definiert und die $\frac{m}{s}$ sind gerade die Äquivalenz-Klassen bezüglich dieser Relation. Die Menge $S^{-1}M$ ist ein $S^{-1}A$-Modul bezüglich der Operationen

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} \qquad = \frac{s'm + sm}{ss'}$$
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m'}{s'} \qquad = \frac{am'}{ss'}$$

(im Fall M = A sind so Addition und Multiplikation im Ring $S^{-1}A$ definiert).

2.Schritt: $S^{-1}A\otimes_A M \cong S^{-1}M$ als $S^{-1}A$-Moduln.

Die Abbildung

$$S^{-1}A \times M \longrightarrow S^{-1}M, (\frac{a}{s}, m) \mapsto \frac{am}{s}$$

ist wohldefiniert: für $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ gibt es ein $t\in S$ mit $t\cdot(s'a - sa') = 0$ in A, also

$$t\cdot(s'am - sa'm) = 0 \text{ in } M.$$

Deshalb gilt $\frac{am}{s} = \frac{a'm}{s'}$. Die Abbildung ist tatsächlich wohldefiniert.

Sie ist nach Konstruktion bilinear über A. Deshalb existiert eine A-lineare Abbildung

$$\varphi: S^{-1}A\otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M, \frac{a}{s}\otimes m \mapsto \frac{am}{s}.$$

Wir haben zu zeigen, diese Abbildung ist bijektiv. Wir zeigen dies durch die Konstruktin der Umkehrabbildung. Sei ψ die Abbildung

$$\psi: S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}A\otimes_A M, \frac{m}{s} \mapsto \frac{1}{s}\otimes m.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert: für $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$ gibt es ein $t\in S$ mit

$$t\cdot(s'\cdot m - s\cdot m') = 0 \text{ in } M,$$

d.h.

$$t\cdot s'\cdot m = t\cdot s\cdot m'.$$

Deshalb gilt in $S^{-1}A\otimes_A M$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\otimes m &= \frac{ts'}{tss'}\otimes m\\ &= \frac{1}{tss'}\otimes ts'm\\ &= \frac{1}{tss'}\otimes t\cdot s\cdot m' \qquad (\text{wegen } t\cdot s'\cdot m = t\cdot s\cdot m')\\ &= \frac{ts}{tss'}\otimes m'\\ &= \frac{1}{s'}\otimes m'.\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, Abbildung ψ ist tatsächlich wohldefiniert.

Weiter gilt

$$\psi(\varphi(\frac{a}{s}\otimes m)) = \psi(\frac{am}{s}) = \frac{1}{s}\otimes am = \frac{a}{s}\otimes m$$

also

$$\psi\circ\varphi = Id.$$

Außerdem ist

$$\varphi(\psi(\frac{m}{s})) = \varphi(\frac{1}{s}\otimes m) = \frac{1\cdot m}{s} = \frac{m}{s} \quad .$$

Die beiden Abbildungen sind also invers zueinander. Aus den Abbildungsvorschriften liest man direkt ab, daß sie $S^{-1}A$-linear sind.

3.Schritt. $S^{-1}A\otimes_A$ ist exakt.

Es reicht zu zeigen, für jeden A-Modul M und jeden Teilmodul $N \subseteq M$ ist die Abbildung

$$S^{-1}A\otimes_A N \longrightarrow S^{-1}A\otimes_A M, \frac{a}{s}\otimes n \mapsto \frac{a}{s}\otimes n,$$

injektiv. Auf Grund des zweiten Schritts reicht es zu zeigen, die Abbildung

$$S^{-1} N \longrightarrow S^{-1} M, \frac{n}{s} \mapsto \frac{n}{s},$$

ist injektiv. Sei also $\frac{n}{s} = \frac{0}{s}$ in $S^{-1}M$. Dann gibt es ein $t\in S$ mit

$$t\bullet(s\bullet n - s\bullet 0) = 0 \text{ in } M.$$

Wegen $n\in N$ besteht dieselbe Relation aber auch im kleineren N, d.h. es gilt $\frac{n}{s} = \frac{0}{s}$ in $S^{-1}N$.

QED.

Beispiel 3.

Seien $f: A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1, M ein flacher A-Modul und

$$I \subseteq B \text{ und } J \subseteq B$$

zwei Ideale von B. Wegen der Flachheit von M über A induzieren die natürlichen Inklusionen

$$I \hookrightarrow B \text{ und } J \hookrightarrow B$$

injektive A-lineare Abbildungen

$$I\otimes_A M \rightarrowtail B\otimes_A M \text{ und } J\otimes_A M \rightarrowtail B\otimes_A M$$

Wir können also $I\otimes M$ und $J\otimes M$ als Teilmoduln von $B\otimes M$ ansehen. Es gilt dann

$$I\otimes M \cap J\otimes M = (I\cap J)\otimes M.$$

Beweis. Die Abbildung $B \longrightarrow B/I \oplus B/J$, $b \mapsto (b \bmod I, b \bmod J)$ ist A-linear und hat den Kern $I\cap J$, induziert also eine injektive A-lineare Abilidung

$$B/(I\cap J) \rightarrowtail B/I \oplus B/J, b \bmod I\cap J \mapsto (b \bmod I, b \bmod J).$$

Weil B flach ist über A erhalten wir durch Anwenden des Funktors $\otimes_A B$ eine injektive Abbildung

$$(B/I\cap J)\otimes M \rightarrowtail (B/I)\otimes M \oplus (B/J)\otimes M, \qquad (1)$$

$$b \bmod I\cap J \otimes m \mapsto (b \bmod I \otimes m, b \bmod J \otimes m).$$

Außerdem erhalten wir aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow B/I \longrightarrow 0$$

die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow I\otimes M \longrightarrow B\otimes M \longrightarrow (B/I)\otimes M \longrightarrow 0,$$

also

$$(B/I)\otimes M =^{11} B\otimes M / I\otimes M,$$

und analog mit J und $I\cap J$ anstelle von I ergibt sich

$$(B/J)\otimes M = B\otimes M / J\otimes M.$$

$$(B/I\cap J)\otimes M = B\otimes M / (I\cap J)\otimes M.$$

Die Injektion (1) bekommt so die Gestalt

---

[11] Dies gilt auch ohne die Annahme, da M flach ist über A, wenn $J\otimes M$ das Bild von $J\otimes M$ in $B\otimes M$ bezeichnet.

$$B\otimes M / (I\cap J)\otimes M \rightarrowtail (B\otimes M/I\otimes M) \oplus (B\otimes M/J\otimes M)$$

$$b\otimes m \bmod (I\cap J)\otimes M \mapsto (b\otimes m \bmod I\otimes M,\ b\otimes M \bmod J\otimes M)$$

Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} B\otimes M \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ B\otimes M/(I\cap J)\otimes M \arrow[r, hook, "\gamma"] & (B\otimes M/I\otimes M)\cap(B\otimes M/J\otimes M) \end{tikzcd}$$

Dabei seien α die natürliche Abbildung auf den Faktor-Modul

$$\alpha(x) = x \bmod (I\cap J)\otimes M,$$

β die A-lineare Abbildung

$$\beta(x) \quad = (x \bmod I\otimes M,\ x \bmod J\otimes M)$$

und γ die eben konstruierte injektive A-lineare Abbildung mit

$$\gamma(x \bmod (I\cap J)\otimes M) = (x \bmod I\otimes M,\ x \bmod J\otimes M).$$

Weil γ injektiv ist, gilt

$$\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Ker}(\gamma\circ\alpha) = \mathrm{Ker}(\alpha) = (I\cap J)\otimes M.$$

Aus der Definition von β lesen wir ab,

$$\mathrm{Ker}(\beta) = I\otimes M \cap I\otimes M.$$

Zusammen folgt

$$(I\cap J)\otimes M = I\otimes M \cap J\otimes M.$$

QED.

1.16 Durchschnitte in Tensorprodukten

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M und N zwei A-Moduln und

$$M' \subseteq M \text{ und } N' \subseteq N$$

zwei Teilmoduln. Außerdem seien die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. M/M' ist flach über A.
2. N' ist flach über A.

Dann ist der Durchschnitt der Teilmoduln $M'\otimes N$ und $M\otimes N'$ von $M\otimes_A N$ gleich

$$M'\otimes N \cap M\otimes N' = M'\otimes N'.$$

Beweis. Trivialerweise gilt "$\supseteq$". Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Durch Tensorieren der exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0 \text{ und } 0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N/N' \longrightarrow 0$$

erhalten wir ein kommuatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M'\otimes N' \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes N' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & (M/M')\otimes N' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M'\otimes N \arrow[r] & M\otimes N \arrow[r, "\delta"] & (M/M')\otimes N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M'\otimes(N/N') & \longrightarrow & M\otimes(N/N') & \longrightarrow & (M/M')\otimes(N/N') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Weil M/M' flach ist, ist die rechte Spalte exakt. Insbesonder ist

$$\beta \text{ injektiv.}$$

Weil N' flach ist, ist die erste Zeile exakt.
Sei

$$x \in M'\otimes N \bigcap M\otimes N'$$

Weil x in $M'\otimes N$ liegt, gilt $\beta(\alpha(x)) = \delta(\gamma(x)) = 0$. Weil β injektiv ist, folgt $\alpha(x) = 0$.
Weil die erste Zeile exakt ist, folgt

$$x \in M'\otimes N'.$$

QED.

2 Die Tensor-Algebra und einige Anwendungen

2.1 Die Tensor-Algebra

2.1.1 Definition

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M und N zwei A-Moduln und n eine nicht-negative ganze Zahl. Eine Abbildung

$$f\colon M\times\ldots\times M \longrightarrow N,\ (x_1,\ldots, x_n) \mapsto f(x_1,\ldots, x_n)$$

heißt n-linear über A, wenn sie in Bezug auf jedes ihrer Argumente x_i linear über A ist.
Eine 1-lineare Abbildung ist dabei einfach eine lineare Abbildung

$$M \longrightarrow N.$$

Eine 2-lineare Abbildung ist dasselbe wie eine bilineare Abbildung

$$M \times M \longrightarrow N.$$

Unter einer 0-linearen Abbildung wollen wir eine lineare Abbildung

$$A \longrightarrow N$$

verstehen.

2.1.2 Die Tensor-Algebra eines A-Moduls

Wir erinnern zunächst an den Begriff der Algebra über einem kommutativen Ring mit 1.
Seien A ein kommutativer Ring mit 1. Eine A-Algebra ist ein Ring B mit 1 zusammen mit einem Homomorphismus

$$A \to B$$

von Ringen mit 1, dessen Bild mit Zentrum von B liegt. Der Homomorphismus heißt dann Struktur-Homomorphismus von B. Seien B und B' zwei A-Algebren. Ein Homomorphismus von A-Algebren

$$f\colon B \to B'$$

ist ein Homomorphismus f von Ringen mit 1, für welchen das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc}
B & \xrightarrow{f} & B' \\
\nwarrow & & \nearrow \\
 & A &
\end{array}$$

Dabei sollen die schrägen Pfeile gerade die Struktur-Homomorphismen bezeichnen.

Seien jetzt A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Die Tensor-Algebra von M über A ist definiert als die direkte Summe

$$T_A(M) := T(M) := \oplus_{n=0}^{\infty} T(M)_n \text{ mit } T(M)_n := M^{\otimes n}$$

Dabei seien

$M^{\otimes 0} = A,$

$M^{\otimes 1} = M$

$V^{\otimes n} := M\otimes...\otimes M$ (n-mal)

die n-te Tensorpotenz von M, d.h. das Tensorprodukt über A von n Exemplaren des A-Moduls M.

Nach Konstruktion ist $T_A(M)$ ein A-Modul. Der direkte Summand

$$T(M)_n = M^{\otimes n} \subseteq T(M)$$

heißt homogener Bestandteil des Grades n von T(M), dessen Elemente t heißen homogene Elemente des Grades n und man schreibt

$$\deg t = n.$$

Seien

$$t' = \sum_{n=1}^{\infty} t'_n \text{ und } t'' = \sum_{n=1}^{\infty} t''_n$$

zwei Elemente von T(M) mit t'_n und t''_n homogen vom Grad n. Wir definieren das Produkt von t' und t'' wie folgt

$$t'\cdot t'' = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} t'_m\otimes t''_n$$

Dabei wird

$t'_m\otimes t''_n \in M^{\otimes m}\otimes M^{\otimes n} \cong M^{\otimes(m+n)}$

als Element von $M^{\otimes(m+n)}$ aufgefaßt. Speziel für n = 0 haben wir

$$t'_m\otimes t''_0 \in M^{\otimes m}\otimes K \cong M^{\otimes m}\text{ , } x\otimes y \mapsto yx,$$

d.h. $t'_m\otimes t''_0$ wird mit $t''_0\cdot t'_m$ identifiziert. Analog wird für m = 0 das Element

$$t'_0\otimes t''_n$$

mit $t'_0\cdot t''_n$ identifiziert. Die Multiplikation von zwei Elementen 0-ten Grades entspricht damit der gewöhnlichen Multiplikation mit Elementen aus A.

Die Abbildung

$M \to T(M), c \mapsto c,$

wobei das Bild c als homogenes Element des Grades 0 von T(M) aufgefaßt wird, heißt natürliche Einbettung von A in die Tensoralgebra T(M).

Die Abbildung

$M \to T(M), m \mapsto m,$

wobei das Bild m als homogenes Element des Grades 1 von T(M) aufgefaßt wird, heißt natürliche Einbettung von M in die Tensoralgebra T(M).

Bemerkungen

(i) Mit der oben definierten Multiplikation ist T(M) eine A-Algebra.

(ii) Die natürliche Einbettung $A \to T(M)$ ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1.

(iii) Die natürliche Einbettung $M \to T(M)$ ist A-linear.

Beispiel

Seien K ein Körper und V = Kv ein eindimensionaler K-Vektorraum. Dann ist

$$K^{\otimes n} = Kv\otimes\ldots\otimes v = Kv^{\otimes n}$$

für jedes n, also

$$T(V) = K\oplus Kv \oplus Kv^{\otimes 2}\oplus \ldots$$

Wenn wir die Multiplikation in T(V) nicht mehr mit dem Tensorzeichen "$\otimes$" sondern mit "•" bezeichnen, erhalten wir

$$T(V) = K \oplus K\bullet v \oplus K\bullet v^2 \oplus \ldots = K[v],$$

d.h. T(V) ist bis auf Isomorphie gerade die K-Algebra der Polynome in der Unbestimmten v mit Koeffizienten aus K.

Beispiel

Seieine K ein Körper und V = Kv + Kw ein zweidimensionaler K-Vektorraum. Dann ist

$$V^{\otimes 1} = V = Kv + Kw$$

$$V^{\otimes 2} = Kv^2 + Kw^2 + Kvw + Kwv$$

$$\ldots$$

und die Tensoralgebra

$$T(V) = K\langle v, w\rangle$$

läßt sich mit der K-Algbra der nicht-kommutativen Polynome in v und w mit Koeffizienten aus K identifizieren.

Analog erhält man für jeden n-dimensionalen K-Vektorraum

$$V = Kv_1 + \ldots + Kv_n$$

eine Identifikation

$$T(V) = K\langle v_1 , \ldots , v_n\rangle$$

der Tensor-Algebra mit der K-Algebra der nicht-kommutativen Polynome in $v_1, \ldots ,v_n$ mit Koeffizienten aus K.

2.1.3 Die Universalitätseigenschaft der Tensorpotenz $M^{\otimes n}$

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Dann ist die Abbildung

$$\rho_n := \rho_n^M : M^n = M\times\ldots\times M \to M^{\otimes n} , (m_1,\ldots,m_n) \mapsto m_1\otimes\ldots\otimes m_n$$

des direkten Produkts von n Exemplaren von M in die n-te Tensorpotenz $M^{\otimes n}$ eine n-lineare Abbildung über A.

Jede n-lineare Abbildung

$$\varphi: M\times\ldots\times M \to N$$

mit Werten in einem A-Modul N faktorisiert sich auf genau eine Weise über ρ_n,

$$\varphi\colon M\times\ldots\times M \xrightarrow{\rho_n} M^{\otimes n} \xrightarrow{\tilde\varphi} N,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde\varphi$ mit $\varphi = \tilde\varphi\circ\rho_n$.

Die linearen Abbildung $\tilde\varphi$ ist durch die folgende Abbildungsvorschrift gegeben.

$$\tilde\varphi\colon M^{\otimes n} \longrightarrow N,\ x_1\otimes\ldots\otimes x_n \mapsto \varphi(x_1,\ldots,x_n).$$

Beweis. Eindeutigkeit von $\tilde\varphi$. Falls $\tilde\varphi$ existiert, so gilt für beliebige $x_1,\ldots,x_n\in M$:

$$\tilde\varphi\,(x_1\otimes\ldots\otimes x_n) = \tilde\varphi\,(\rho_n(x_1,\ldots,x_n)) = \varphi(x_1,\ldots,x_n).$$

Die Werte von $\tilde\varphi$ auf den Elementen der Gestalt $x_1\otimes\ldots\otimes x_n$ sind also eindeutig festgelegt. Da diese Elemente ein Erzeugendensystem von $M^{\otimes n}$ bilden und da $\tilde\varphi$ linear sein soll, ist somit die gesamte Abbildung $\tilde\varphi$ festgelegt.

Existenz von $\tilde\varphi$. Beweis durch Induktion nach n.

Im Fall n = 0 ist $\rho_0\colon A \longrightarrow A$ nach Vereinbarung die identische Abbildung von A und die Behauptung ist trivial (jede Abbildung $A \longrightarrow N$ faktorisiert sich eindeutig über die identische Abbildung $A \longrightarrow A$).

Im Fall n = 1 ist $\rho_1\colon M \longrightarrow M$ die identische Abbildung und φ eine lineare Abbildunge

$$\varphi\colon M = M^{\otimes 1} \to N$$

Auch in diesem Fall faktorisiert sich φ eindeutig

$$\varphi\colon M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{\tilde\varphi} N$$

über die identische Abbildung (mit $\tilde\varphi = m$).

Sei jetzt n > 1. Für jedes feste $x_0\in M$ ist die folgende Abbildung (n-1)-linear über A.

$$\varphi_{x_0}\colon M^{n-1} \to N,\ (x_1,\ldots,x_{n-1}) \mapsto \varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}, x_0),$$

Nach Induktionsvoraussetzung faktorisiert sie sich eindeutig über ρ_{n-1},

$$\varphi_{x_0}\colon M^{n-1} \xrightarrow{\rho_{n-1}} M^{\otimes(n-1)} \xrightarrow{\tilde\varphi_{x_0}} N,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde\varphi_{x_0}$ mit $\varphi_{x_0} = \tilde\varphi_{x_0}\circ\rho_{n-1}$, d.h. mit

$$\begin{aligned}\tilde\varphi_{x_0}(x_1\otimes\ldots\otimes x_{n-1}) &= \tilde\varphi_{x_0}(\rho_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})) = m_{x_0}(x_1,\ldots,x_{n-1})\\ &= m(x_1,\ldots,x_{n-1},x_0).\end{aligned}$$

Die lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi}_{x_0} : M^{\otimes(n-1)} \longrightarrow N,\ x_1\otimes...\otimes x_{n-1} \mapsto \varphi(x_1,...,x_{n-1},v_0),$$

ist durch die Bedingung

$$\tilde{\varphi}_{x_0}\ (x_1\otimes...\otimes x_{n-1}) = \varphi(x_1,...,x_{n-1},x_0) \qquad (1)$$

eindeutig festgelegt (da die $x_1\otimes...\otimes x_{n-1}$ ein Erzeugendensystem von $M^{\otimes(n-1)}$ bilden). Betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{\varphi}':M^{\otimes(n-1)}\times M \to N\ ,\ (t, x) \mapsto \tilde{\varphi}_x(t). \qquad (2)$$

Nach Konstruktion ist sie linear im ersten Argument t. Zeigen wir, sie ist auch linear im zweiten Argument x, d.h. , zeigen wir, es gilt

$$\tilde{\varphi}_{c'x'+c''x''}(t) = c'\tilde{\varphi}_{x'}(t) + c''\ \tilde{\varphi}_{x''}(t)$$

für alle $x',x''\in M$, alle $c',c''\in A$ und alle $t\in M^{\otimes(n-1)}$, d.h.

$$\tilde{\varphi}_{c'x'+c''x''} = c'\tilde{\varphi}_{x'} + c''\ \tilde{\varphi}_{x''}.$$

Auf beiden Seiten stehen lineare Abbildungen. Zum Beweis ihrer Gleichheit reicht es zu zeigen, sie haben dieselben Werte in allen Vektoren eines Erzeugendensystems von $M^{\otimes(n-1)}$. Es reicht also zu zeigen,

$$\tilde{\varphi}_{c'x'+c''x''}\ (x_1\otimes...\otimes x_{n-1}) = c'\tilde{\varphi}_{x'}(x_1\otimes...\otimes x_{n-1}) + c''\ \tilde{\varphi}_{x''}\ (x_1\otimes...\otimes x_{n-1})$$

für beliebige $x_1,...,x_{n-1}\in M$. Wegen (1) gilt

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \varphi(x_1,...,x_{n-1},\ c'x'+c''x'') \\ &= c'\varphi(x_1,...,x_{n-1},x') + c''\varphi(x_1,...,x_{n-1},x'') \\ &= \text{RHS} \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, die Abbildung (2) ist bilinear. Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts faktorisiert sie sich eindeutig über die natürliche Abbildung ins Tensorprodukt $\rho:M^{\otimes(n-1)}\times M \to M^{\otimes(n-1)}\otimes M = M^{\otimes n}$,

$$\tilde{\varphi}': M^{\otimes(n-1)}\times M \xrightarrow{\rho} M^{\otimes n} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} N,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi}\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{\varphi}'(t,x) = \tilde{\varphi}(t\otimes v) = \tilde{\varphi}_x(t)$$

für alle $t\in M^{\otimes(n-1)}$ und alle $x\in M$. Speziell für $t = x_1\otimes...\otimes x_{n-1}$ erhalten wir

$$\tilde{\varphi}\ (x_1\otimes...\otimes x_{n-1}\otimes x) = \tilde{\varphi}_x(x_1\otimes...\otimes x_{n-1}) = \varphi(x_1,...,x_{n-1},x).$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$\varphi = \tilde{\varphi}\circ\rho_n\ ,$$

d.h. $\tilde{\varphi}$ ist gerade die Abbildung, deren Existenz wir beweisen wollen.

QED.

Bemerkung

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M und N zwei A-Moduln. Bezeichne

$$L_A(M, N)_n$$

den A-Modul der n-linearen Abbildungen $M\times\ldots\times M \longrightarrow N$ über A. Die gerade bewiesene Universalitätseigenschaft von $M^{\otimes n}$ besagt, daß die A-lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A(M^{\otimes n}, N) \longrightarrow L_A(M, N)_n,\ \tilde{\varphi} \mapsto \tilde{\varphi}\circ\rho_n,$$

bijektiv, also ein Isomorphismus ist.
Ist A = K ein Körper, so hat insbesondere der Modul der n-linearen Abbildungen auf M mit Werten in N die Dimension

$$\begin{aligned}\dim_K L_K(M, N)_n &= \dim_K \mathrm{Hom}_K(M^{\otimes n}, N)\\ &= \dim_K M^{\otimes n}\bullet\dim_K N\\ &= (\dim_K M)^n\bullet\dim_K N.\end{aligned}$$

2.1.4 Funktorialität der Tensorpotenz eines Moduls

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und φ: $M \longrightarrow N$ eine A-lineare Abbildung des A-Moduls M mit Werten im A-Modul N. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Für jede natürliche Zahl n gibt es genau eine A-lineare Abbildung

$$\varphi^{\otimes n}: M^{\otimes n} \longrightarrow N^{\otimes n}$$

für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M\times\ldots\times M & \xrightarrow{\varphi\times\ldots\times\varphi} & N\times\ldots\times N \\ \rho^M_n\downarrow & & \downarrow\rho^N_n \\ M^{\otimes n} & \xrightarrow{\varphi^{\otimes n}} & N^{\otimes n} \end{array}$$

kommutativ ist.

(ii) Diese Abbildung $\phi^{\otimes n}$ ist gegeben durch die Abbildungsvorschrift

$$\phi^{\otimes n}(x_1\otimes\ldots\otimes x_n) = \varphi(x_1)\otimes\ldots\otimes\varphi(x_n).$$

(iii) Ist φ = Id: $M \longrightarrow M$ die identische Abbildung von M, so ist

$$\mathrm{Id}^{\otimes n} = \mathrm{Id}: M^{\otimes n} \longrightarrow M^{\otimes n}$$

die identische Abbildung von $M^{\otimes n}$.

(iv) Sine φ: $L \longrightarrow M$ und ψ: $M \longrightarrow N$ zwei A-lineare Abbildunge von A-Moduln, so gilt

$$(\psi\circ\varphi)^{\otimes n} = \psi^{\otimes n}\circ\varphi^{\otimes n}.$$

Beweis. Zu (i). Weil die Zusammensetzung

$$M\times\ldots\times M \xrightarrow{\varphi\times\ldots\times\varphi} N\times\ldots\times N \xrightarrow{\rho^N_n} N^{\otimes n}$$

multilinear ist über A, folgt die Aussage aus der Universalitätseigenschaft 2.1.4.
Zu (ii). Die Abbildungsvorschrift ergibt sich aus der Kommutativität des Diagramm von (i) und der Definition von ρ^N_n in 2.1.3.

Zu (iii). Die Aussage ergibt sich aus der Abbildungsvorschrift (ii) im Fall φ = id.
Zu (iv). Die Aussage ergibt sich aus der Abbildungsvorschrift (ii) und der Funktorialität des Tensorprodukts.
QED.

2.1.5 Die Universalitätseigenschaft der Tensor-Algebra

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Dann gibt es für jede A-Algebra S und jede A-lineare Abbildung

$$f:M \to S$$

genau einen Homomorphismus

$$\tilde{f}:T_A(M) \to S$$

von A-Algebren derart, daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f"'] & T(M) \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

dabei sei ρ die natürliche Einbettung von M in die Tensor-Algebra T(M).

Beweis. <u>Eindeutigkeit von $\tilde{f}$</u>. Wir nehmen an, $\tilde{f}$ existiert und leiten eine Formel für $\tilde{f}$ her, aus der hervorgeht, daß $\tilde{f}$ eindeutig festgelegt ist. Sei

$$t \in T(M).$$

Dann ist t eine Summe von endlich vielen homogenen Elementen. Ein homogenes Element des Grades n (aus $M^{\otimes n}$) wiederum ist eine Summe aus endlich vielen Elementen der Gestalt $x_1 \otimes ... \otimes x_n$ mit $x_i \in M$. Mit anderen Worten, t hat die Gestalt

$$t = \sum_{i=1}^{s} x^i_1 \otimes ... \otimes x^i_{n_i} \quad \text{mit } x^i_j \in M.$$

Damit gilt, da $\tilde{f}$ eine A-lineare Abbildung ist, die Produkte in Produkte überführt,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}(x^i_1 \otimes ... \otimes x^i_{n_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}(x^i_1)\bullet ...\bullet \tilde{f}(x^i_{n_i}) && (x^i_j \mathrm{P}\, T(M)_1) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}(\rho(x^i_1))\bullet ...\bullet \tilde{f}(\rho(v^i_{n_i})) && (x^i_j \mathrm{P}\, M) \\ &= \sum_{i=1}^{s} f(v^i_1)\bullet ...\bullet f(v^i_{n_i}) && \text{(Kommutativität des Diagramms)} \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{f}$ eindeutig durch f festgelegt.

<u>Existenz von $\tilde{f}$</u>. Betrachten wir die Abbildung

$$f_n:M\times ...\times M \to S,\ (x_1,...,x_n) \mapsto f(x_1)\bullet ...\bullet f(x_n).$$

Auf Grund des Distributivgesetzes für den Ring S ist diese linear in jedem der n Argumente. Nach 2.3 faktorisiert sich diese Abbildung eindeutig über die natürliche Abbildung $\rho:M^n \longrightarrow M^{\otimes n}$,

$$f_n: M^n \xrightarrow{\rho} M^{\otimes n} \xrightarrow{\tilde{f}_n} S,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\underline{\tilde{f}}_n$ mit $f_n = \underline{\tilde{f}}_n \circ \rho$, d.h. mit

$$\underline{\tilde{f}}_n(x_1 \otimes ... \otimes x_n) = \underline{\tilde{f}}_n(\rho(x_1,...,x_n)) = f_n(x_1,...,x_n) = f(x_1)\cdot ... \cdot f(x_n)$$

für alle $x_1,...,x_n \in M$. Wir definieren $\underline{\tilde{f}}$: $T(V) \to R$, indem wir setzen

$$\underline{\tilde{f}}(t) = \tilde{f}_0(t_0) + \tilde{f}_1(t_1) + ... + \tilde{f}_s(t_s)$$

falls $t = t_0 + t_1 + ... + t_s$ gilt mit t_i homogen vom Grad i. Dabei sei

$$\tilde{f}_0(t_0) = t_0 \cdot 1_S$$

Die Abbildung ist wohldefiniert und linear. Für homogene Elemente $x \in M$ des Grades 1 gilt

$$\underline{\tilde{f}}(\rho(x)) = \underline{\tilde{f}}_1(x) = f(x).$$

Auf Grund der Defintion von $\tilde{f}_0$ gilt $\tilde{f}(1_{\underline{A}}) = 1_S$. Durch direktes Nachrechnent sieht man, daß $\tilde{f}$ ein Ringhomomorphismus ist.

QED.

2.1.6 Eigenschaften der Tensoralgebra

(i) Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und B eine A-Algebra. Ein <u>Erzeugendensystem</u> von B über A ist eine Famlie

$$\{b_i\}_{i\in I}$$

von Elementen aus B mit der Eigenschaft, daß jede A-Teilalgebra

$$B' \subseteq B,$$

welche alle b_i enthält, gleich B sein muß,

$$B' = B.$$

<u>Beispiel 1</u>.

Für jede A-Algebra B bildet die Familie der Elemente von B ein Erzeugendensystem.

<u>Beispiel 2</u>.
Ist

$$B = A[x_1, ... , x_n]$$

die A-Algebra der Polynome in den Unbestimmten $x_1, ... , x_n$ mit Koeffizienten aus A, so bilden die Unbestimmten $x_1, ... , x_n$ ein Erzeugendensystem von B über A.

(ii) Seien B eine A-Algebra und $M \subseteq B$ ein A-Modul, welcher ein Erzeugendensystem von B als A-Algebra enthält. Das Bild der Fortsetzung der natürlichen Einbettung

$$i: M \hookrightarrow B$$

zu einem A-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{i}: T(M) \longrightarrow B$$

ist dann eine A-Teilalgebra, die ebenfalls dieses Erzeugendensystem enthält. Diese Teilalgebra ist deshalb gleich B, d.h. der A-Algebra-Homomorphismus $\tilde{i}$ ist surjektiv. Es folgt

$$B \cong S(V)/\mathrm{Ker}(\tilde{i}).$$

Mit anderen Worten, jede A-Algebra ist ein Faktor einer Tensor-Algebra über A.

(iii) Sei

Mod

die Kategorie der Paare (A, M), deren erste Koordinate A ein kommutativer Ring mit 1 ist und deren zweite ein A-Mod. Die Morphismen

$$(A, M) \longrightarrow (B, N)$$

von **Mod** seien Paare (f, h), deren erste Koordinate f ein Homomorphismus

$$f.\ A \longrightarrow B$$

von Ringen mit 1 ist und deren zweite ein Homomorphismus

$$h: M \longrightarrow N$$

der additiven Gruppen von M und N ist mit

$$h(a\bullet m) = f(a)\bullet h(m)$$

für jedes $a \in A$ und jedes $m \in M$.

(iv) Ist (f,h): (A,M) ⟶ (B,N) ein Morphismus der Kategorie **Mod** so kann man die die Zusammensetzung

$$M \xrightarrow{h} N \overset{i_N}{\hookrightarrow} T_B(N)$$

von h mit der natürlichen Einbettung von N in die Tensor-Algebra als Homomorphismus von A-Moduln mit Werten in der A-Algebra $T_B(N)$ auffassen. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Tensor-Algebren, gibt es genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$T(f,h): T_A(M) \longrightarrow T_B(N),$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_A(M) & \xrightarrow{T(f,h)} & T_B(N) \\ i_A \uparrow & & i_B \uparrow \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

kommutativ ist. Auf diese Weise wird der Übergang zur Tensor-Algebra zu einem Funktor

$$T: \mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Rings},\ (A,M) \mapsto T_A(M),\ (f,h) \mapsto T(f,h),$$

der Kategorie **Mod** der Moduln mit Werten in der Kategorie der (nicht notwendig kommutativen) Ringe mit 1.

(v) Seien f: A ⟶ B ein Homomorphismus von Ringen mit 1 und M ein A-Modul. Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$T_A(M)\otimes_A B \xrightarrow{\cong} T_B(M\otimes_A B)$$

denn für natürliche i und nicht-negative ganze j gilt

$$M^{\otimes i}\otimes_A(B\otimes_A M)^{\otimes j} \cong M^{\otimes(i-1)}\otimes_A M\otimes_A(B\otimes_A M)^{\otimes j}$$

$$\cong^{12} M^{\otimes(i-1)}\otimes_A(M\otimes_A B)\otimes_B(B\otimes_A M)^{\otimes j}$$
$$\cong M^{\otimes(i-1)}\otimes_A (B\otimes_A M)^{\otimes(j+1)}.$$

Wiederholtes Anwenden liefertt

$$M^{\otimes n}\otimes_A B \cong (M\otimes_A B)^{\otimes n} \text{ für jedes n.}$$

Bemerkung
Nachfolgend wollen wir die Beschreibung von A-Algebren als Faktoren einer Tensor-Algebra an einigen Beispielen illustrieren. Dazu benötigen wir den Begriff des Ideals.

2.2 Symmetrische Algebra und symmetrische Potenzen

2.2.1 Das von einer Menge erzeugte Ideal

Seien A ein kommutativer Ring mit1 und B eine A-Algebra. Ein Ideal von B ist ein A-Teilmodul

$$I \subseteq B$$

mit der Eigenschaft, daß für beliebige $x \in I$ und $b \in B$ die beiden Produkte

$$b\bullet x \in I \text{ und } x\bullet b \in I$$

von b und x in I liegen.

Beispiel
Für jede Teilmenge $S \subseteq B$ ist der A-Teilmodul von S, welcher von den Elementen der Gestalt

$$b\bullet s\bullet b' \text{ mit } b,b' \in B \text{ und } s\in S$$

erzeugt wird, ein Ideal von B (wegen des Assoziativegesetzes der Multiplikation).
Dieses Ideal heißt das von M erzeugte Ideal von B und wird mit

$$I(S) := I_B(S)$$

bezeichnet.

2.2.2 Der Faktorraum nach einem Ideal

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, B eine nicht-notwendig kommutative A-Algbra mit 1 und $I \subseteq B$ ein zweiseitiges Ideal. Dann ist durch

$$(x + I) \cdot (y + I) = xy + I$$

ein Produkt auf B/I definert und der A-Modul B/I ist mit diesem Produkt eine A-Algebra. Die natürliche Abbildung

$$\rho:B \to B/I$$

ist ein Homomorphismus von A-Algebren.

Beweis. Seien $x + I = x' + I$ und $y + I = y' + I$. Wir haben zu zeigen, es gilt

$$xy + I = x'y' + I.$$

Es gilt

$$x-x'\in I \text{ und } y-y'\in I$$

also

$$(x-x')y \in I \text{ und } x'(y-y')\in I$$

---

[12] $(B\otimes_A M)^{\otimes j}$ ist ein B-Modul.

also

$$xy - x'y' \in I$$

also

$$xy + I = x'x' + I.$$

Nach Konstruktion ist

$$\rho(xy) = xy + I = (x+I)(y+I) = \rho(x)\rho(y).$$

Daraus ergibt sich, daß B/I ein Ring ist und ρ ein Ringhomomorphismus. Bezeichnet 1 das Einselement von B, so spielt $\rho(1)$ die Rolle des Einselements von B/I. Durch die Zusammensetzung der Ringhomomorphismen

$$A \to B \to B/I$$

bekommt B/I die Struktur einer A-Algebra.
QED.

2.2.3 Die symmetrische Algebra

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und

$$I'(M) \subseteq T(M)$$

das von den Elementen der Gestalt

$$x\otimes y - y\otimes x \text{ mit } x,y\in M$$

erzeugte zweiseitige Ideal. Dann heißt

$$S(M) = S_A(M) = T(M)/I'(M)$$

symmetrische Algebra von M über A. Die Zusammensetzung

$$i_M{:}M \to T(M) \xrightarrow{\rho} S(M)$$

der natürlichen Einbettung (im Grad 1) mit der natürliche Abbildung auf den Faktorring heißt wieder natürliche Einbettung (im Grad 1). Analog definiert man die natürliche Einbettung

$$A \longrightarrow T(M) \xrightarrow{\rho} S(M)$$

im Grad 0.
Bemerkung
Die natürlichen Einbettungen sind injektiv, weil $I'(V) = Ker(\rho)$ aus Summen von homogenen Elementen eines Grades ≥ 2 besteht. Sie gestatten es somit M und A mit Teilmengen von S(M) zu identifizieren.

2.2.4 Die Universalitätseigenschaft der symmetrischen Algebra

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul, B eine kommutative A-Algebra und

$$f{:}\ M \to B$$

eine A-lineare Abbildung. Dann gibt es genau eine Fortsetzung

$$\tilde{f}{:}\ S(M) \to B$$

von f zu einen Homomorphismus von A-Algebren, d.h. es gibt genau einen A-Algebra-Homomorphismus von $\tilde{f}$: S(M) $\to$ B, dessen Zusammensetzung mit der natürlichen Einbettung

$$\bar{\rho}{:}M \xrightarrow{i} T(M) \xrightarrow{\rho} T(M)/I'(M) = S(M)$$

gleich f ist.

Beweis. Existenz von $\tilde{f}$.Auf Grund der Universalitätseigenschatt der Tensor-Algebra gibt es genau eine Fortsetzung

$$f': T(M) \to B$$

von f zu einen Homomorphismus von A-Algebren, d.h. die Zusammensetzung von f' mit der natürlichen Abbildung

$$i: M \longrightarrow T(M)$$

ist gleich

$$f' \circ i = f.$$

Für beliebige Vektoren $x', x'' \in M$ und beliebige Tensoren $t', t'' \in T(M)$ gilt

$$f'(t'(x'\otimes x'' - x''\otimes x')t'') = f'(t')(f'(x')f'(x'') - f'(x'')f'(x'))f'(t'') = 0,$$

da S kommutativ ist. Mit anderen Worten, ein Erzeugendensystem des definierenden Ideals I'(M) liegt im Kern von f', d.h.

$$I'(M) \subseteq \mathrm{Ker}(f').$$

Auf Grund des Homomorphie-Satzes faktorisiert sich f' auf genau eine Weise über die natürliche Abbildung $\rho: T(M) \longrightarrow S(M) = T(M)/I'(M)$ auf den Faktorraum,

$$f': T(M) \xrightarrow{\rho} S(M) \xrightarrow{\tilde f} B,$$

d.h. es gibt genau einen A-Algebra-Homomorphismus $\tilde f$ mit $f = \tilde f \circ \rho$, d.h. mit

$$\tilde f(t + I'(V)) = \tilde f(\rho(t)) = f'(t).$$

Insbesonder gilt

$$\tilde f(\overline{\rho}(x)) = \tilde f(\rho(i(x))) = f'(i(x)) = f(x)$$

für jedes $x \in M$, d.h. $\tilde f$ setzt die Abbildung f fort.

<u>Eindeutigkeit von</u> $\tilde f$.

Angenommen, es existiert ein weiterer A-Algebra-Homomorphismus $\tilde f': S(M) \longrightarrow B$ mit

$$\tilde f' \circ \overline{\rho} = f.$$

Dann gilt

$$f = \tilde f' \circ \overline{\rho} = \tilde f' \circ \rho \circ i.$$

Dann sind $\tilde f' \circ \rho: T(M) \longrightarrow B$ und $\tilde f \circ \rho: T(M) \longrightarrow B$ Fortsetzungen von $f: M \longrightarrow B$ zu A-Algebra-Homomorphismen auf T(M). Auf Grund der Universalitäteignschaft von T(M) muß $\tilde f' \circ \rho = \tilde f \circ \rho$ gelten. Weil ρ surjektiv ist, folgt $\tilde f' = \tilde f$, d.h. $\tilde f$ ist eindeutig bestimmt.
QED.

2.2.5 Eigenschaften der symmetrischen Algebra

(i) Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Dann ist jede kommutative A-Algebra ein Faktor einer symmetrischen Algebra über A.

Genauer: ist B eine kommutative A-Algebra und

$$M \subseteq B \text{ ein A-Modul},$$

welcher ein Erzeugendensystem von B als A-Algebra enthält. Dann ist B als A-Algebra isomorph zu einer Faktor-Algebra der symmetrischen Algebra $S_A(M)$,

$$B \cong S_A(M)/I,$$

mit einem Ideal I von $S_A(M)$.

(ii) Sei $(f,h): (A,M) \longrightarrow (B,N)$ ein Morphismus der Kategorie **Mod**. Dann ist $S_B(N)$ vermittels f eine A-Algebra und es gibt genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$S(h) := S(f,h) \colon S_A(M) \longrightarrow S_B(N),$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S_A(M) & \xrightarrow{S(h)} & S_B(N) \\ i_M \uparrow & & i_N \uparrow \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

kommutativ ist.[13] Auf diese Weise wird der Übergang zur symmetrischen Algebra zu einem Funktor

$$S\colon \mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{(commutative\ Rings)},\ (A,M) \mapsto S_A(M),\ (f,h) \mapsto S(f,h),$$

der Kategorie **Mod** der Moduln mit Werten in der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1.

(iii) Seien $f\colon A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1 und M ein A-Modul. Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus

$$S_A(M)\otimes_A B \xrightarrow{\cong} S_B(M\otimes_A B),\ m_1\bullet\ldots\bullet m_r \mapsto (m_1\otimes 1)\bullet\ldots\bullet(m_r\otimes 1)$$

(iv) Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M', M" zwei A-Moduln. Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus[14]

$$S_A(M') \otimes_A S_A(M'') \xrightarrow{\cong} S_A(M'\oplus M''),\ p\otimes q \mapsto p\bullet q.$$

Beweis. Zu (i). Das Bild der Fortsetzung der natürlichen Einbettung

$$i\colon M \hookrightarrow B$$

zu einem A-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{i}\colon S(M) \longrightarrow B$$

ist eine A-Teilalgebra, die das Erzeugendensystem von B enthält. Diese Teilalgebra ist deshalb gleich B, d.h. der A-Algebra-Homomorphismus $\tilde{i}$ ist surjektiv. Es folgt

$$B \cong S(V)/\mathrm{Ker}(\tilde{i}).$$

Zu (ii). Die Zusammensetzung

$$M \xrightarrow{h} N \overset{i_N}{\hookrightarrow} S_B(N)$$

von h mit der natürlichen Einbettung von N in die symmetrische Algebra kann man als Homomorphismus von A-Moduln mit Werten in der A-Algebra $S_B(N)$ auffassen. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der symmetrischen Algebren, gibt es genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$S_A(M) \longrightarrow S_B(N),$$

welcher diese Zusammensetzung fortsetzt, d.h. für welchen das angegebene Diagramm kommutativ ist.

Zu (iii). Aus dem natürlichen Isomorphismus

$$T_A(M)\otimes_A B \xrightarrow{\cong} T_B(M\otimes_A B)$$

von 2.5 (v) erhält man durch Anwenden des Funktors

---

[13] Die vertikalen Abbildungen sollen die natürlichen Einbettungen der Moduln in die jeweilige symmetrische Algebra bezeichnen.

[14] Wir fassen hier M' und M" als Teilmoduln der direkten Summe auf, also $S_A(M')$ und $S_A(M'')$ als Teilalgebren von $S_A(M'\oplus M'')$.

$$S_A(M)\otimes_{T_A(M)} = (T_A(M)/I'(M))\otimes_{T_A(M)}$$

einen Isomorphismus

$$S_A(M)\otimes_A B \xrightarrow{\cong} T_B(M\otimes_A B)/I'(M)\bullet T_B(M\otimes_A B)$$

Die natürliche Abbildung $M \longrightarrow M\otimes_A B$ induziert eine Abbildung

$$I'(M) \longrightarrow I'(M\otimes_A B).$$

Deren Bild erzeugt ein Ideal von $T_B(M\otimes_A B)$, welches erzeugt wird von den Elementen der Gestalt

$$(x\otimes 1)\otimes(y\otimes 1) - (y\otimes 1)\otimes(x\otimes 1) \text{ mit } x, y \in M.$$

Durch Multiplikation mit $(1\otimes c)\bullet(1\otimes d)$ mit $c, d \in B$ erhalten wir Elemente der Gestalt

$$(x\otimes c)\otimes(y\otimes d) - (y\otimes d)\otimes(x\otimes c) \text{ mit } x, y \in M, c,d \in B$$

welche auch in diesem Ideal liegen. Die Elemente dieser Gestalt erzeugen aber das Ideal $I'(M\otimes_A B)$. Damit gilt $I'(M)\bullet T_B(M\otimes_A B) = I'(M\otimes_A B)$, also

$$S_A(M)\otimes_A B \xrightarrow{\cong} T_B(M\otimes_A B)/ I'(M\otimes_A B) = S_B(M\otimes_A B).$$

Zu (iv). Es reicht zu zeigen, $S_A(M')\otimes_A S_A(M'')$ hat die Universalitätseigenschaft von $S_A(M'\oplus M'')$. Zunächst haben wir eine natürliche Einbettung von $M'\oplus M''$ in das Tensorprodukt:

$$\begin{aligned} S_A(M')\otimes_A S_A(M'') &= (A\oplus M'\oplus\ldots.)\otimes_A(A\oplus M''\oplus\ldots) \\ &= A\otimes A \oplus M'\otimes A \oplus A\otimes M'' \oplus \ldots \\ &\hookleftarrow M'\otimes A \oplus A\otimes M'' \cong M' \oplus M''. \end{aligned}$$

Die Zusammensetzungen mit den natürlichen Einbettungen

$$M' \hookrightarrow M'\oplus M'' \text{ und } M'' \hookrightarrow M' \oplus M''$$

induzieren A-Algebra-Homomrophismen

$$\alpha{:}S_A(M') \longrightarrow S_A(M'\oplus M'') \text{ und } \beta{:}S_A(M'') \longrightarrow S_A(M' \oplus M''),$$

welche eine A-bilineare Abbildung

$$S_A(M') \times S_A(M'') \longrightarrow S_A(M'\oplus M''),\ (p, q) \mapsto \alpha(p)\bullet\beta(q) = p\bullet q,$$

definieren und damit einen A-Algebra-Homomorphismus

$$S_A(M') \otimes_A S_A(M'') \longrightarrow S_A(M'\oplus M''),\ p\otimes q \mapsto p\bullet q. \qquad (1)$$

Sei jetzt eine A-lineare Abbildung

$$\ell{:}M'\oplus M'' \longrightarrow B$$

mit Werten in einer A-Algebra B gegeben. Den induzierten A-Algebra-Homomorphismus

$$S_A(M'\oplus M'') \longrightarrow B$$

setzen wir mit (1) und den natürlichen A-Algebra-Homomorphismen

$$S_A(M') \longrightarrow S_A(M') \otimes_A S_A(M''),\ p \mapsto p\otimes 1,$$

$$S_A(M'') \longrightarrow S_A(M') \otimes_A S_A(M''),\ q \mapsto 1\otimes q,$$

zusammen und erhalten A-Algebra-Homomorphismen

$$\alpha'{:}S_A(M') \longrightarrow B \text{ und } \beta'{:}S_A(M'') \longrightarrow B,$$

also eine A-bilineare Abbildung

$$S_A(M') \times S_A(M'') \longrightarrow B,\ (p, q) \mapsto \alpha'(p)\bullet\beta'(q),$$

und damit einen A-Algebra-Homomorphismus

$$S_A(M') \otimes_A S_A(M'') \longrightarrow B,\ p\otimes q \mapsto \alpha'(p)\bullet\beta'(q),$$

welcher die Einschränkung von ℓ auf M' und M'' fortsetzt, und damit auch ℓ selbst. Wir haben noch die Eindeutigkeit der Fortsetzung zu beweisen. Sei

$\gamma: S_A(M') \otimes_A S_A(M'') \longrightarrow B$

ein A-Algebra-Homomorphismus, welcher ℓ fortsetzt. Dann ist die Einschränkung auf $M' = M'\otimes 1$ und die auf $M'' = 1\otimes M''$ eine Fortsetzung der Einschränkung von ℓ auf M' bzw. M''. Auf Grund der Universalitätseigenschaften von $S_A(M')$ und $S_A(M'')$ sind damit die Einschränkungen von γ auf $S_A(M')$ und $S_A(M'')$ eindeutig festgelegt. Für beliebige $u \in S_A(M')$ und $v \in S_A(M'')$ gilt damit

$$\gamma(u\otimes v) = \gamma((u\otimes 1)\bullet(1\otimes v)) = \gamma(u\otimes 1)\bullet\, \gamma(1\otimes v).$$

Die beiden Faktoren rechts sind eindeutig festgelegt (wie gerade erwähnt). Also ist es auch $\gamma(u\otimes v)$.

QED.

Bemerkung
Nachfolgend wollen wir die Beschreibung von A-Algebren als Faktoren einer Tensor-Algebra an einigen Beispielen illustrieren. Dazu benötigen wir den Begriff des Ideals.

2.2.6 Vergleich mit den Polynom-Algebren

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein endlich erzeugter freier A-Modul mit dem A-linear unabhängigen Erzeugendensystem $m_1,...,m_n \in M$ und

$$S := A[x_1,...,x_n]$$

die A-Algebra der Polynome in $x_1,...,x_n$ mit Koeffizienten aus A. Dann gibt es genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$A[x_1,...,x_n] \to S(V) \text{ mit } x_i \mapsto v_i\ .$$

Dieser Homomorphismus ist sogar ein Isomorphismus.

Beweis. Betrachten wir die A-lineare Abbildung

$$j{:}M \to A[x_1,...,x_n],\ c_1m_1+...+c_1m_n \mapsto c_1x_1+...+c_1x_n\ .$$

<u>1. Schritt</u>. Die Polynom-Algebra besitzt die Universalitätseingenschaft der Symmetrischen Algebra.

Seien S eine kommutative A-Algebra und

$$f: M \to S$$

eine A-lineare Abbildung. Wir haben zu zeigen, es gibt genau einen Homomorphismus von A-Algebren

$$\tilde{f}{:}K[x_1,...,x_n] \to S$$

mit $\tilde{f}\circ j = f$.

<u>Existenz von</u> $\tilde{f}$. Für jedes Polynom $p \in A[x_1,...,x_n]$ setzen wir

$$\tilde{f}(p) = p(f(v_1),...,f(v_n)),$$

d.h. wir ordnen jedem Polynom p den Wert an der Stelle $(f(v_1),...,f(v_n))$ zu. Auf diese Weise ist ein Homomorphismus von A-Algebren definiert,

$$\tilde{f}: A[x_1,...,x_n] \to S$$

Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\circ j(c_1v_1+...+c_1v_n) &= \tilde{f}(c_1x_1+...+c_1x_n) && \text{(nach Definition von j)}\\
&= c_1f(v_1)+...+c_1f(v_n) && \text{(nach Definition von } \tilde{f}\text{)}\\
&= f(c_1v_1+...+c_1v_n) && \text{(weil f linear ist)}
\end{aligned}$$

d.h. es gilt $\tilde{f}\circ j = f$.

<u>Eindeutigkeit von</u> $\tilde{f}$. Falls $\tilde{f}$ existiert, so gilt für jedes Polynom p

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(p) = \tilde{f}(p(x_1,...,x_n)) &= p(\tilde{f}(x_1),..., \tilde{f}(x_n)) && (\tilde{f} \text{ ist Algebra-Homomorphismus})\\
&= p(\tilde{f}(j(v_1)),..., \tilde{f}(j(v_n))) && \text{(nach Definition von j)}\\
&= p((f(v_1),...,f(v_n)) && (\text{wegen } \tilde{f}\circ j = f).
\end{aligned}$$

Die Abbildung $\tilde{f}$ ist somit durch f eindeutig festgelegt.

<u>2. Schritt</u>: Vergleich von S(M) und $A[x_1,...,x_n]$.

Betrachten wir die folgenden beiden kommutativen Diagramme.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & S(M) \\
A[x_1,...,x_n] \arrow[ur, "\tilde{i}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & A[x_1,...,x_n] \\
S(M) \arrow[ur, "\tilde{j}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei seien j die oben definierte A-lineare Abbildung und $i: M \hookrightarrow S(M)$ die natürliche Einbettung. Die A-Algebra-Homomorphismen $\tilde{i}$ und $\tilde{j}$ existieren auf Grund der Universalitätseigenschaften von j bzw. i und sind durch die Kommutativität der beiden Diagramme eindeutig festgelegt. Durch Zusammensetzen der beiden Diagramme erhalten wir die beiden folgenden kommutativen Diagramme.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & S(M) \\
S(M) \arrow[ur, "\tilde{i}\circ\tilde{j}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & A[x_1,...,x_n] \\
A[x_1,...,x_n] \arrow[ur, "\tilde{j}\circ\tilde{i}"'] &
\end{tikzcd}$$

Diese Diagramme bleiben kommutativ, wenn man $\tilde{i}\circ\tilde{j}$ und $\tilde{j}\circ\tilde{i}$ durch identische Abbildungen ersetzt. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussagen der Universalitätseigenschaften von i und j folgt

$$\tilde{i}\circ\tilde{j} = \mathrm{Id} \text{ und } \tilde{j}\circ\tilde{i} = \mathrm{Id}.$$

Die A-Algebra-Homomorphismen $\tilde{i}$ und $\tilde{j}$ sind also zueinander inverse Isomorphismen.

Außerdem gilt für jedes α:

$$\tilde{i}(x_\alpha) = \tilde{i}(j(v_\alpha)) = i(v_\alpha) = v_\alpha.$$

QED.

2.2.7 Symmetrische Potenzen

Auf Grund der Definition der symmetrischen Algebra eines Moduls M über einem kommutativen Ring A mit 1 gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I'(M) \longrightarrow T_A(M) \xrightarrow{\bar{\rho}} S_A(M) \longrightarrow 0$$

mit einem surjektiven Homomorphismus $\bar{\rho}$ von A-Algebren und einem Ideal

$$I'(M) \subseteq T_A(M)$$

der Tensoralgebra, welches von den Elementen der Gestalt

$$x\otimes y - y\otimes x \text{ mit } x,y\in M$$

erzeugt wird. Diese Elemente liegen im Tensorquadrat

$$T_A(M)_2 = M^{\otimes 2}$$

vom M, sind also homogen vom Grad 2 in der Tensoralgebra. Deshalb zerfällt das von ihnen erzeugte Ideal in eine direkte Summe

$$I'(M) = \oplus_{n=0}^{\infty} I'(M)_n$$

von A-Moduln mit

$$I'(M)_n \subseteq T_A(M)_n,$$

sodaß die symmetrische Algebra ebenfalls in eine direkte Summe

$$S_A(M) = \oplus_{n=0}^{\infty} S_A(M)_n$$

von A-Moduln zerfällt mit

$$S_A(M)_n \cong T_A(M)_n / I'(M)_n ,$$

d.h. für jede nicht-negative ganze Zahl n hat man eine exakte Sequenz von B-Moduln

$$0 \longrightarrow I'(M)_n \longrightarrow T_A(M)_n \xrightarrow{\bar{\rho}_n} S_A(M)_n \longrightarrow 0.$$

Es gilt

$$I'(M)_n = T_A(M)_n \cap I'(M).$$

2.2.8 Die Universalitätseigenschaft der symmetrischen Potenz

Die Zusammensetzung

$$\sigma_n := \sigma_n^M : M\times\ldots\times M \longrightarrow S_A(M)_n$$

der Abbildung $\bar{\rho}_n$ von 2.2.7 mit der natürlichen Abbildung

$$\rho_n^M : M\times\ldots\times M \longrightarrow T_A(M)_n = M^{\otimes n}, (m_1,\ldots,m_n) \mapsto m_1\otimes\ldots\otimes m_n,$$

ist multilinear über A und symmetrisch. Sie ist außerdem universell bezüglich dieser Eigenschaft, d.h. für jede über A multilineare und symmetrische Abbildung

$$s: M\times\ldots\times M \longrightarrow N$$

mit Werten in einem A-Modul N, gibt es genau eine A-lineare Abbildung

$$\tilde{s} : S_A(M)_n \longrightarrow N$$

mit

$$s = \tilde{s} \circ \sigma_n.$$

Beweis.
Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Tensorpotenz gibt es genau eine A-lineare Abbildung

$$\approx s : T_A(M)_n \longrightarrow N$$

mit $s = \approx s \circ \rho_n^M$. Weil s symmetrisch ist, ändert sich der Wert von

$$\approx s(m_1 \otimes ... \otimes m_n) = \approx s \circ \rho_n^M(m_1,...,m_n) = s(m_1,...,m_n),$$

nicht, wenn man die m_i permutiert. Insbesondere gilt

$$\approx s(m_1 \otimes ... \otimes m_{i-1} \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \otimes m_{i+2} \otimes ... \otimes m_n) = 0$$

für beliebige m_ν, x, y $\in$ M. Die Elemente der Gestalt

$$m_1 \otimes ... \otimes m_{i-1} \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \otimes m_{i+1} \otimes ... \otimes m_n$$

bilden aber gerade ein Erzeugendensystem des A-Moduls

$$T_A(M)_n \cap I'(M) = I'(M)_n.$$

Da diese im Kern von $\approx s$ liegen, faktorisiert sich $\approx s$ über $T_A(M)_n / I'(M)_n = S_A(M)_n$,

d.h. es gibt eine A-lineare Abbildung $\tilde{s} : S_A(M)_n \longrightarrow N$ mit

$$\approx s = \tilde{s} \circ \bar{\rho}_n : T_A(M)_n \xrightarrow{\bar{\rho}_n} S_A(M)_n \xrightarrow{\tilde{s}} N.$$

Es folgt

$$s = \approx s \circ \rho_n^M = \tilde{s} \circ \bar{\rho}_n \circ \rho_n^M = \tilde{s} \circ \sigma_n$$

Weil das Bild von ρ_n^M ein Erzeugendensystem von $T_A(M)_n$ enthält und $\bar{\rho}_n$ surjektiv ist,

enthält das Bild von $\sigma_n = \bar{\rho}_n \circ \rho_n^M$ ein Erzeugendensysstem von $S_A(M)_n$. Deshalb ist $\tilde{s}$

durch die Bedingung $s = \tilde{s} \circ \sigma_n$ eindeutig bestimmt.
QED.

2.2.9 Funktorialität

Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und n eine nicht-negative ganze Zahl n. Für jede A-lineare Abbildung

$$\phi: M \longrightarrow N$$

von A-Moduln M und N gibt es genau eine A-lineare Abbildung

$$\phi_{*n} := S(\phi)_n := S(\phi)_{A,n} : S_A(M)_n \longrightarrow S_A(N)_n,$$

für welche das Diagramm A-linearer Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} M\times\ldots\times M & \xrightarrow{\phi\times\ldots\times\phi} & N\times\ldots\times N \\ \sigma_n^M\downarrow & & \downarrow\sigma_n^N \\ S_A(M)_n & \xrightarrow{\phi_*} & S_A(N)_n \end{array} \qquad (1)$$

kommuativ wird. Diese Abbildung hat die folgenden Eigenschaften.

(i) Für beliebige $m_1,...,m_n \in M$ gilt

$$\phi_*(m_1\bullet...\bullet m_n) = \phi(m_1)\bullet...\bullet\ \phi(m_n)).$$

(ii) Ist $\phi = id: M \longrightarrow M$ die identische Abbildung von M, so ist

$$id_* = id: S_A(M)_n \longrightarrow S_A(M)_n,$$

die identische Abbildung von $S_A(M)_n$.

(iii) Für je zwei A-lineare Abbildungen $\varphi: L \longrightarrow M$ und $\phi: M \longrightarrow N$ gilt

$$(\varphi\circ\phi)_* = \varphi_*\circ\phi_*.$$

Beweis. Die Zusammensetzung

$$M\times\ldots\times M \xrightarrow{\phi\times\ldots\times\phi} N\times\ldots\times N \xrightarrow{\sigma_n^N} S_A(N)_n$$

ist multilinear über A und symmetrisch, faktorisiert sich also eindeutig über σ_n^M, d.h. es gibt ein eindeutig bestimmtes A-lineares ϕ_* , für welches das Diagramm (1) kommutativ ist.

<u>Eigenschaft</u> (i) ergibt sich direkt aus der Kommutativität des Diagramms (1).

<u>Eigenschaft</u> (ii) ergibt sich aus der Tatsache, daß ϕ_* durch die Kommutativität von (1) eindeutig festgelegt ist und daß im Fall N = M und ϕ = id das Diagramm (1) kommutativ bleibt, wenn man ϕ_* durch die identische Abbildung ersetzt.

Eigenachaft (iii) ergibt sich aus der Tatsache, daß die beiden inneren Vierecke des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} L\times\ldots\times L & \xrightarrow{\varphi\times\ldots\times\varphi} & M\times\ldots\times M & \xrightarrow{\phi\times\ldots\times\phi} & N\times\ldots\times N \\ \sigma_n^L\downarrow & & \sigma_n^M\downarrow & & \downarrow\sigma_n^N \\ S_A(L)_n & \xrightarrow{\varphi_*} & S_A(M)_n & \xrightarrow{\phi_*} & S_A(N)_n \end{array}$$

nach Definition von φ_* und ϕ_* kommutativ sind, denn dann ist auch das äußere Viereck kommutativ, d.h. es gilt die Behauptung.

QED.

2.2.10 Eigenschaften der symmetrischen Potenzen

(i) Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Das Bild von

$$S(M)_\ell$$

der ℓ-ten Tensorpotenz $M^{\otimes\ell} = T(M)_\ell$ bei der natürlichen Abbildung

$$\sigma: T(M) \longrightarrow S(M),\ v_1\otimes...\otimes v_i \mapsto v_1\bullet...\bullet v_i$$

heißt ℓ-te <u>symmetrische Potenz</u> von M. Ist der A-Modul M frei mit der Basis

$$m_1,...,m_n,$$

so entspricht das Potenzprodukt $x_1^{\alpha_1}\bullet...\bullet x_n^{\alpha_n}$ beim A-Algebra-Isomorphismus

$$A[x_1,..., x_n] \xrightarrow{\cong} S(M),\ x_i \mapsto v_i\ ,$$

von 2.2.6 gerade dem Element

$$m_1^{\alpha_1}\bullet...\bullet m_n^{\alpha_n} \in S(M)$$

und die ℓ-te symmetrische Potenz von M dem Teilmodul der homogenen Polynome

$$\sum_{|i|=\ell} c_i x^i \in A[x_1,..., x_n]$$

des Grades ℓ des Polynomrings. Insbesondere hat der freie A-Modul $S(M)_\ell$ den Rang

$$\mathrm{rank}_A\ S(M)_\ell = \binom{\ell+n-1}{n-1}$$

und als Basis die Potenzprodukte

$$m_1^{\alpha_1}\bullet...\bullet m_n^{\alpha_n} \text{ mit } \alpha_1+...+\alpha_n = \ell \text{ (und } \alpha_i \ge 0 \text{ für jedes i).}$$

(ii) Da die $M^{\otimes\ell}$ den Vektorraum T(M) erzeugen, erzeugen die $S(M)_\ell$ den Faktorraum S(M),

$$S(M) = \sum_{\ell=0}^{\infty} S(M)_\ell.$$

Da sich jedes Polynom auf genau eine Weise als Summe homogener Polynome schreiben läßt, ist diese Summe sogar direkt.

$$S(M) = \oplus_{\ell=0}^{\infty} S(M)_\ell.$$

(iii) Die symmetrischen Potenzen lassen sich in ähnlicher Weise durch eine Universalitätseigenschaft charakterisieren, wie die Tensorpotenzen. Für jeden A-Modul N bezeichne

$$S(M, N)_\ell$$

den A-Modul der ℓ-linearen symmetrischen Abbildungen $M\times...\times M \longrightarrow N$. Weiter sei σ_ℓ die natürliche Abbildung

$$\sigma_\ell: M\times...\times M \xrightarrow{\rho_\ell} M^{\otimes\ell} \longrightarrow S(M)_\ell,\ (v_1,..., v_\ell) \mapsto v_1\bullet...\bullet v_\ell,$$

(welche symmetrisch ist, denn S(M) ist kommutativ).Dann ist die lineare Abbldung

$$\mathrm{Hom}_A\ (S(M)_\ell\ , N) \longrightarrow S(M, N)_\ell\ ,\ \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\sigma_\ell,$$

ein Isomorphismus für jedes N. Diese Aussage ist auch für nicht notwendig freie A-Moduln richtig. Sind M und N frei und vom endlichen Rang, so gilt

$$\mathrm{rank}_A\, S(M, N)_\ell = \mathrm{rank}_A\, S(M)_\ell \cdot \mathrm{rank}_A N = \binom{\ell+n-1}{n-1} \cdot \mathrm{rank}_A\, N.$$

Beweis Zu (i). Wir beweisen die Dimensionsformel durch Induktion nach dem Rang von M, d.h. nach der Anzahl n der Unbestimmen $x_1,..., x_n$.

Im Fall n = 1 ist der A-Modul der homogenen Polynome des Grades ℓ von $A[x_1]$ eindimensional für jedes ℓ,

$$\dim S(M)_\ell = 1 = \binom{\ell+0}{0} = \binom{\ell+n-1}{n-1}.$$

Sei jetzt n > 1. Jedes homonene Polynom $p(x_1,..., x_n)$ des Grades ℓ läßt sich in der folgenden Gestalt schreiben:

$$p(x_1,..., x_n) = p_0(x_1,..., x_{n-1})x_n^\ell + p_1(x_1,..., x_{n-1})x_n^{\ell-1}+...+p_n(x_1,..., x_{n-1})$$

mit eindeutig bestimmten homogenen Polynomen $p_i(x_1,..., x_{n-1})$ des Grades i in den Unbestimmten $x_1,..., x_{n-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat der A-Modul der Polynome der Gestalt $p_i(x_1,..., x_{n-1})$ den Rang

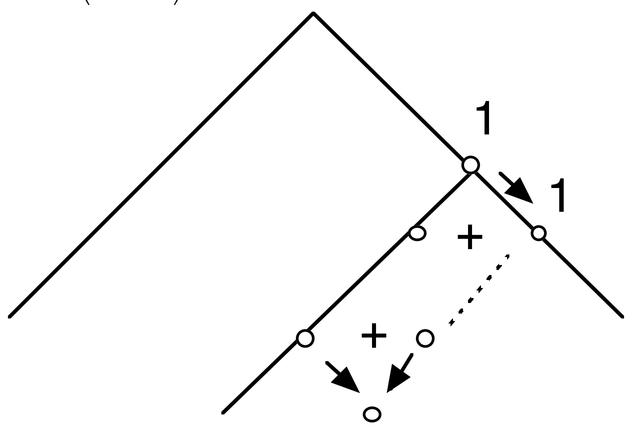
$$\binom{i+n-2}{n-2}$$

Für den gesuchten Rang erhalten wir damit

$$\mathrm{rank}\, S(M)_\ell = \binom{\ell+n-2}{n-2} + \binom{\ell-1+n-2}{n-2} + \binom{\ell-2+n-2}{n-2} + ... + \binom{0+n-2}{n-2}$$

Mit Hilfe der Standard-Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks sehen wir, es gilt

$$\mathrm{rank}\, S(M)_\ell = \binom{\ell+n-1}{n-1}.$$



Zu (ii). Es ist nichts zu zeigen.
Zu (iii). Wir haben die Bijektivität der Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A(S(M)_\ell, N) \longrightarrow S(M, N)_\ell,\ \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\sigma_\ell,$$

zu beweisen. Sei $f \in S(M, N)_\ell$, d.h. sei

$$f\colon M \times ... \times M \longrightarrow N$$

eine ℓ-lineare symmetrische Abbildung. Als ℓ-lineare Abbildung faktorisiert sich f eindeutig über die natürliche Abbildung ρ_ℓ. $M\times...\times M \longrightarrow M^{\otimes\ell}$,

$$f: M\times...\times M \xrightarrow{\rho_\ell} M^{\otimes\ell} \xrightarrow{\tilde f} N,$$

d.h. es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde f$ mit $f = \tilde f\circ\rho_\ell$, d.h. mit

$$\tilde f(v_1\otimes...\otimes v_\ell) = \tilde f(\rho_\ell(v_1,...,v_\ell)) = f(v_1,...,v_\ell).$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß sich $\tilde f$ eindeutig über die natürliche Surjektion $M^{\otimes\ell} \longrightarrow S(M)_\ell$ faktorisiert. Wegen der Surjektivität dieser Surjektion ist die Faktorisierung, falls sie existiert, eindeutig. Es reicht also, die Existenz zu beweisen. Nach dem Homomorphie-Satz reicht es zu zeigen,

$$\tilde f(\mathrm{Ker}(M^{\otimes\ell} \longrightarrow S(M)_\ell)) = 0.$$

Der Kern der natürlichen Abbildungt $T(M) \longrightarrow S(M)$ ist gerade das Ideal $I'(M)$. Der Kern der natürlichen Surjektion

$$M^{\otimes\ell} \longrightarrow S(M)_\ell$$

besteht somit gerade aus den homogenen Elementen des Grades ℓ von $I'(M)$, d.h. dieser Kern wird als A-Modul gerade von den Elementen der folgenden Gestalt erzeugt.

$$\alpha\otimes(v\otimes w - w\otimes v)\otimes\beta$$

mit $v, w \in M$,

$$\alpha = v_1\otimes...\otimes v_a,\ v_i \in M$$
$$\beta = w_1\otimes...\otimes w_b,\ w_i \in M$$

und $a + 2 + b = \ell$. Wir reicht zu zeigen, alle Elemente dieser Gestalt werden durch $\tilde f$ in die Null abgebildet. Es gilt

$$\begin{aligned}\tilde f(\alpha\otimes(v\otimes w - w\otimes v)\otimes\beta) &= \tilde f(\alpha\otimes v\otimes w\otimes\beta) - \tilde f(\alpha\otimes w\otimes v\otimes\beta)\\ &= f(v_1,...,v_a,v,w,w_1,...,w_b) - f(v_1,...,v_a,w,v,w_1,...,w_b)\\ &= 0\end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt dabei, weil $\tilde f$ linear ist, das zweite auf Grund der Definition von $\tilde f$. Das dritte Gleichheitszeichen schließlich gilt, weil f symmetrisch ist.
QED.

2.3 Äußere Algebra und äußere Potenzen

2.3.1 Die äußere Algebra

Seien A ein kommutativer Ring mit 1, M ein A-Modul und

$$I''(M) \subseteq T(M)$$

das von den Elementen der Gestalt

$$x\otimes x \text{ mit } x\in M$$

erzeugte Ideal. dann heißt

$$\wedge(M) := \wedge_A(M) := T(M)/I''(M)$$

äußere Algebra von M über A. Die Zusammensetzung

$$M \to T(M) \xrightarrow{\rho} \wedge(M)$$

der natürlichen Einbettung (im Grad 1) mit der natürliche Abbildung auf den Faktorring heißt wieder natürliche Einbettung (im Grad 1). Analog definiert man die natürliche Einbettung

$$A \to T(M) \xrightarrow{\rho} \wedge(M)$$

im Grad 0.

Bemerkungen

(i) Die natürlichen Einbettungen sind injektiv, weil I"(V) = Ker(ρ) aus Summen von homogenen Elementen eines Grades ≥ 2 besteht. Sie gestatten es somit M und A mit Teilmengen von ∧(M) zu identifizieren.

(ii) Das Bild von $v_1 \otimes ... \otimes v_r \in T(V)$ bei der natürlichen Abbildung

$$T(V) \xrightarrow{\rho} \wedge(V),\ v_1 \otimes ... \otimes v_r \mapsto v_1 \wedge ... \wedge v_r$$

auf den Faktorraum wird mit $v_1 \wedge ... \wedge v_r$ bezeichnet. Die äußere Algebra besteht also aus endlichen Summen von Elementen der Gestalt $v_1 \wedge ... \wedge v_r$.

2.3.2 Die Universalitätseigenschaft der äußeren Algebra

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul, B eine A-Algebra und

$$f: M \to B$$

eine A-lineare Abbildung mit

$$f(v)f(v) = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

Dann gibt es genau eine Fortsetzung

$$\tilde{f}: \wedge(M) \to B$$

von f zu einen Homomorphismus von A-Algebren, d.h. es gibt genau einen Homomorphismus von A-Algebren $\tilde{f}: \wedge(B) \to B$, dessen Zusammensetzung mit der der natürlichen Einbettung

$$\bar{i}: M \xrightarrow{i} T(M) \xrightarrow{\rho} T(M)/I"(M) = \wedge(M)$$

gleich f ist.

Beweis. Existenz von $\tilde{f}$.Auf Grund der Universalitätseigenschatt der Tensor-Algebra gibt es genau eine Fortsetzung

$$f': T(M) \to S$$

zu einen Homomorphismus von A-Algebren. Für beliebige Vektoren x∈M und beliebige Tensoren t',t"∈T(M) gilt

$$f'(t'(x\otimes x)t") = f'(t')(f'(x)f'(x)f'(t") = 0,$$

Mit anderen Worten, ein Erzeugendensystem des definierenden Ideals I"(M) liegt im Kern von f';

$$I"(M) \subseteq Ker(f').$$

Auf Grund des Homomorphie-Satzes faktorisiert sich f' eindeutig über die natürliche Surjektion auf den Faktorraum modulo dem Ideal I"(V), d.h. über

$$\rho: T(M) \longrightarrow \wedge(M) = T(M)/I"(M),$$

$$f': T(V) \xrightarrow{\rho} \wedge(V) \xrightarrow{\tilde f} S,$$

d.h. es gibt genau einen A-Algebra-Homomorphismus $\tilde f$ mit $f' = \tilde f \circ \rho$, d.h. mit

$$\tilde f(x_1 \wedge ... \wedge x_i) = \tilde f(\rho(x_1 \otimes ... \otimes x_i)) = f'(x_1 \otimes ... \otimes x_i) = f(x_1) \bullet ... \bullet f(x_i)$$

Speziell für i = 1 sehen wir, daß $\tilde f$ die Abbildung f fortsetzt.

Eindeutigkeit von $\tilde f$.

Sei $\tilde f': \wedge(V) \xrightarrow{\tilde f} S$ ein weiterer A-Algebra-Homomorphismus mit $\tilde f' \circ \bar i = f$. Dann gilt

$$\tilde f' \circ \rho \circ i = \tilde f' \circ \bar i = f = \tilde f' \circ \bar i = \tilde f \circ \rho \circ i,$$

d.h. $\tilde f' \circ \rho$ und $\tilde f \circ \rho$ sind zwei Fortsetzung von f auf T(M). Auf Grund der Universalitätseigenschaft von T(M) folgt $\tilde f' \circ \rho = \tilde f \circ \rho$. Weil ρ surjektiv ist, muß

$$\tilde f' = \tilde f$$

gelten.

QED.

2.3.3 Vergleich mit den Graßmann-Algebren

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein freier A-Modul mit dem über A linear unabhängigen Erzeugendensystem $m_1,...,m_n \in M$. Für festes $k \in \mathbb{N}$ und jede echt aufsteigende Folge

$$i_1 < i_2 < ... < i_k$$

von natürlichen Zahlen aus $\{1,...,n\}$ führen wir ein Symbol

(1) $$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_k}$$

ein. Bezeichne

$$\wedge^k A^n = \oplus\, Ae_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_k}$$

den von der Menge dieser Symbole frei erzeugten A-Modul. Für k = 1 erhalten wir den freien A-Modul vom Rang n,

$$\wedge^1 A^n = Ae_1 + ... + Ae_n = A^n.$$

Für k = n erhalten wir den freien A-Modul vom Rang 1,

$$\wedge^n A^n = A \bullet e_1 \wedge .... \wedge e_n$$

und für k > n ist $\wedge^k A^n = 0$. Für k = 0 wollen wir

$$\wedge^0 A^n = A$$

setzen.. Schließlich sei

(2) $$A<e_1,...,e_n> := \oplus_{k=0}^{\infty} \wedge^k A^n = \wedge^0 A^n \oplus \wedge^1 A^n \oplus ..... \oplus \wedge^n A^n$$

die direkte Summe aller $\wedge^k A^n$ Wir wollen jetzt auf dem Vektorraum (2) eine Multiplikation einführen. Dazu ist es nützlich, die Symbole (1) auch zu definieren, wenn die indizes i_ν keine echt aufsteigende Folge bilden. Für jede Permutation $\pi \in S_k$ setzen wir

$$e_{i_{\pi(1)}}\wedge e_{i_{\pi(2)}}\wedge\ldots\wedge e_{i_{\pi(k)}} := \operatorname{sign}(\pi)\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$$

Weiter vereinbaren wir, daß ein Symbol der Gestalt (1) mit mehrfach auftretenden Indizes den Nullvektor bezeichnen soll. Mit diesen Vorbereitungen können wir eine Multiplikation in

$$K<e_1,\ldots,e_n>$$

einführen, inden wir setzen

$$\Big(\sum_{i_1\ldots i_k} a'_{i_1\ldots i_k} e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\Big)\cdot\Big(\sum_{j_1\ldots j_\ell} a''_{j_1\ldots j_k} e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_\ell}\Big)$$

$$:= \sum_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_\ell} a'_{i_1\ldots i_k} a''_{j_1\ldots j_k} e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\wedge e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_\ell}$$

Dann gibt es genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$A<e_1,\ldots,e_n> \to \wedge(V) \text{ mit } e_i \mapsto m_i .$$

Dieser Homomorphismus ist sogar ein Isomorphismus.
Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$j: M \to A<e_1,\ldots,e_n>,\ \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha v_\alpha \mapsto \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha e_\alpha$$

<u>1. Schritt</u>. $A<e_1,\ldots,e_n>$ hat zusammen mit j der Universalitätseigenschaft der äußeren Algebra.

Seien B eine A-Algebra und

$$f: M \to B$$

eine A-lineare Abbildung mit

$$f(x)\cdot f(x) = 0 \text{ für jedes } x\in M.$$

Wir haben zu zeigen, es gibt genau einen A-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde f: A<e_1,\ldots,e_n> \to B$$

mit $\tilde f\circ j = f$, d.h. mit

$$\tilde f(e_\alpha) = \tilde f(j(v_\alpha)) = f(v_\alpha).$$

<u>Eindeutigkeit von</u> $\tilde f$.
Jedes Element von $A< e_1,\ldots,e_n>$ hat die Gestalt

$$x = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k} a^k_{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$$

Falls $\tilde f$ existiert, so gilt

$$\tilde f(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k} a^k_{i_1,\ldots,i_k} \tilde f(e_{i_1})\bullet\tilde f(e_{i_2})\bullet\ldots\bullet\tilde f(e_{i_k})\quad (\tilde f \text{ ist K-Algebra-Homomorphismus})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k} a^k_{i_1,\ldots,i_k} f(e_{i_1})\bullet f(e_{i_2})\bullet\ldots\bullet f(e_{i_k})\quad (\text{wegen } \tilde f\circ\bar i = f).$$

Damit ist die Eindeutigkeit von $\tilde f$ bewiesen.

<u>Existenz von $\tilde{f}$</u>. Wir setzen

$$\tilde{f}(x) := \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k} a^k_{i_1,\ldots,i_k} f(e_{i_1})\bullet f(e_{i_2})\bullet\ldots\bullet f(e_{i_k})$$

für

$$x = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_k} a^k_{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}.$$

Diese Definition ist korrekt, weil die Vektoren

$$e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}.$$

mit $i_1 < \ldots < i_k$ ein A-linear unabhängiges Erzeugendensystem von $A<e_1,\ldots,e_n>$ bilden, d.h. weil die Koeffizienten $a^k_{i_1,\ldots,i_k}$ durch x eindeutig bestimmt sind. Nach Definition gilt dann insbesondere

$$\tilde{f}(j(v_\alpha)) = \tilde{f}(e_\alpha) = f(e_\alpha),$$

d.h. es ist $\tilde{f}\circ j = f$. Nach Konstruktion ist $\tilde{f}$ A-linear. Wir haben noch zu zeigen,

$$\tilde{f}(c'\cdot c'') = \tilde{f}(t')\cdot \tilde{f}(t'') \text{ für } c',c''\in K< e_1,\ldots,e_n>.$$

Das sieht man durch direktes Nachrechnen.
QED.

2.3.4 Äußere Potenzen

Auf Grund der Definition der äußeren Algebra eines Moduls M über einem kommutativen Ring A mit 1 gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I''(M) \longrightarrow T_A(M) \xrightarrow{\bar{\omega}} \wedge_A(M) \longrightarrow 0$$

mit einem surjektiven Homomorphismus $\bar{\omega}$ von A-Algebren und einem Ideal

$$I''(M) \subseteq T_A(M)$$

der Tensoralgebra, welches von den Elementen der Gestalt

$$x\otimes x \text{ mit } x\in M$$

erzeugt wird. Diese Elemente liegen im Tensorquadrat

$$T_A(M)_2 = M^{\otimes 2}$$

vom M, sind also homogen vom Grad 2 in der Tensoralgebra. Deshalb zerfällt das von ihnen erzeugte Ideal in eine direkte Summe

$$I''(M) = \oplus_{n=0}^{\infty} I''(M)_n$$

von A-Moduln mit

$$I''(M)_n \subseteq T_A(M)_n,$$

sodaß die äußere Algebra ebenfalls in eine direkte Summe

$$\wedge_A (M) = \oplus_{n=0}^{\infty} \wedge_A(M)_n$$

von A-Moduln zerfällt mit

$$\wedge_A(M)_n \cong T_A(M)_n/I''(M)_n ,$$

d.h. für jede nicht-negative ganze Zahl n hat man eine exakte Sequenz von B-Moduln

$$0 \longrightarrow I''(M)_n \longrightarrow T_A(M)_n \xrightarrow{\overline{\omega}_n} \wedge_A(M)_n \longrightarrow 0.$$

Es gilt

$$I''(M)_n = T_A(M)_n \cap I''(M).$$

2.3.5 Die Universalitätseigenschaft der äußeren Potenz

Die Zusammensetzung

$$\omega_n := \omega_n^M : M\times...\times M \longrightarrow \wedge_A(M)_n$$

der Abbildung $\overline{\omega}_n$ von 2.3.4 mit der natürlichen Abbildung

$$\rho_n^M : M\times...\times M \longrightarrow T_A(M)_n = M^{\otimes n}, (m_1,...,m_n) \mapsto m_1\otimes...\otimes m_n,$$

ist multilinear über A und <u>alternierend</u>[15]. Sie ist außerdem universell bezüglich dieser Eigenschaft, d.h. für jede über A multilineare und alternierende Abbildung

$$a: M\times...\times M \longrightarrow N$$

mit Werten in einem A-Modul N, gibt es genau eine A-lineare Abbildung

$$\tilde{a}: S_A(M)_n \longrightarrow N$$

mit

$$a = \tilde{a}\circ\omega_n.$$

Beweis. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Tensorpotenz gibt es genau eine A-lineare Abbildung

$$\approx{a}: T_A(M)_n \longrightarrow N$$

mit $a = \approx{a}\circ\rho_n^M$. Weil a alternierend ist, ist der Wert von

$$\approx{a}(m_1\otimes...\otimes m_n) = \approx{a}\circ\rho_n^M(m_1,...,m_n) = a(m_1,...,m_n),$$

gleich Null, wenn zwei der m_i gleich sind. Insbesondere gilt

$$\approx{s}(m_1\otimes...\otimes m_{i-1}\otimes x\otimes y\otimes m_{i+2}\otimes...\otimes m_n) = 0$$

für beliebige m_ν, x, y $\in$ M. Die Elemente der Gestalt

$$m_1\otimes...\otimes m_{i-1}\otimes x\otimes y\otimes m_{i+2}\otimes...\otimes m_n$$

bilden aber gerade ein Erzeugendensystem des A-Moduls

$$T_A(M)_n \cap I''(M) = I''(M)_n.$$

Da diese im Kern von $\approx{a}$ liegen, faktorisiert sich $\approx{a}$ über $T_A(M)_n / I''(M)_n = \wedge_A(M)_n$,

d.h. es gibt eine A-lineare Abbildung $\tilde{a}$: $S_A(M)_n \longrightarrow N$ mit

$$\approx{a} = \tilde{a}\circ\overline{\omega}_n : T_A(M)_n \xrightarrow{\overline{\omega}_n} \wedge_A(M)_n \xrightarrow{\tilde{a}} N.$$

Es folgt

---

[15] d.h. wenn zwei Argumente gleich sind, ist der Wert gleich Null. Insbesondere ändert ein Wert sein Vorzeichen, wenn man zwei Argumente vertauscht.

$$a = \approx{a} \circ \rho_n^M = \tilde{a} \circ \bar{\omega}_n \circ \rho_n^M = \tilde{a} \circ \omega_n$$

Weil das Bild von ρ_n^M ein Erzeugendensystem von $T_A(M)_n$ enthält und $\bar{\omega}_n$ surjektiv ist, enthält das Bild von $\omega_n = \bar{\omega}_n \circ \rho_n^M$ ein Erzeugendensysstem von $\wedge_A(M)_n$. Deshalb ist $\tilde{a}$ durch die Bedingung $a = \tilde{a} \circ \omega_n$ eindeutig bestimmt.

QED.

2.3.6 Funktorialität

Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und n eine nicht-negative ganze Zahl n. Für jede A-lineare Abbildung

$$\phi: M \longrightarrow N$$

von A-Moduln M und N gibt es genau eine A-lineare Abbildung

$$\phi_{*n} := \wedge(\phi)_n := \wedge(\phi)_{A,n} : \wedge_A(M)_n \longrightarrow \wedge_A(N)_n,$$

für welche das Diagramm A-linearer Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} M\times\ldots\times M & \xrightarrow{\phi\times\ldots\times\phi} & N\times\ldots\times N \\ \omega_n^M \downarrow & & \downarrow \omega_n^N \\ \wedge_A(M)_n & \xrightarrow{\phi_*} & \wedge_A(N)_n \end{array} \qquad (1)$$

kommuativ wird. Diese Abbildung hat die folgenden Eigenschaften.

(i) Für beliebige $m_1,\ldots,m_n \in M$ gilt

$$\phi_*(m_1\wedge\ldots\wedge m_n) = \phi(m_1)\wedge\ldots\wedge \phi(m_n)).$$

(ii) Ist $\phi = id: M \longrightarrow M$ die identische Abbildung von M, so ist

$$id_* = id: \wedge_A(M)_n \longrightarrow \wedge_A(M)_n,$$

die identische Abbildung von $\wedge_A(M)_n$.

(iii) Für je zwei A-lineare Abbildungen $\varphi: L \longrightarrow M$ und $\phi: M \longrightarrow N$ gilt

$$(\varphi\circ\phi)_* = \varphi_*\circ\phi_*.$$

Beweis. Die Zusammensetzung

$$M\times\ldots\times M \xrightarrow{\phi\times\ldots\times\phi} N\times\ldots\times N \xrightarrow{\omega_n^N} \wedge_A(N)_n$$

ist multilinear über A und alternierend, faktorisiert sich also eindeutig über ω_n^M, d.h. es gibt ein eindeutig bestimmtes A-lineares ϕ_* , für welches das Diagramm (1) kommutativ ist.

<u>Eigenschaft</u> (i) ergibt sich direkt aus der Kommutativität des Diagramms (1).

<u>Eigenschaft</u> (ii) ergibt sich aus der Tatsache, daß ϕ_* durch die Kommutativität von (1) eindeutig festgelegt ist und daß im Fall N = M und ϕ = id das Diagramm (1) kommutativ bleibt, wenn man ϕ_* durch die identische Abbildung ersetzt.

<u>Eigenachaft</u> (iii) ergibt sich aus der Tatsache, daß die beiden inneren Vierecke des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
L\times\ldots\times L & \xrightarrow{\varphi\times\ldots\times\varphi} & M\times\ldots\times M & \xrightarrow{\phi\times\ldots\times\phi} & N\times\ldots\times N \\
\omega_n^L\downarrow & & \omega_n^M\downarrow & & \downarrow\omega_n^N \\
\wedge_A(L)_n & \xrightarrow{\varphi_*} & \wedge_A(M)_n & \xrightarrow{\phi_*} & \wedge_A(N)_n
\end{array}$$

nach Definition von φ_* und ϕ_* kommutativ sind, denn dann ist auch das äußere Viereck kommutativ, d.h. es gilt die Behauptung.
QED.

2.3.7 Eigenschaften der äußeren Potenzen

(i) Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein A-Modul. Das Bild von

$$\wedge(M)_\ell$$

der ℓ-ten Tensorpotenz $M^{\otimes\ell} = T(M)_\ell$ bei der natürlichen Abbildung

$$\omega: T(M) \longrightarrow \wedge(M),\ x_1\otimes\ldots\otimes x_i \mapsto x_1\wedge\ldots\wedge x_i$$

heißt ℓ-te <u>äußere Potenz</u> von M. Ist der A-Modul M frei mit der Basis

$$m_1,\ldots,m_n\ ,$$

so entspricht das Element $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_\ell}$ (mit $i_1 < \ldots < i_\ell$) beim A-Algebra-Isomorphismus

$$A<e_1,\ldots,e_n> \xrightarrow{\cong} \wedge(M),\ e_i \mapsto m_i$$

von 2.3.3 gerade dem Element

$$m_{i_1}\wedge\ldots\wedge m_{i_\ell} \in \wedge(M)$$

und die ℓ-te äußere Potenz von M gerade den A-Linearkombinationen von ℓ-fachen äußeren Produkten der Vektoren e_i. Insbesondere hat der freie A-Modul $\wedge(M)_\ell$ den Rang

$$\dim \wedge(M)_\ell = \binom{n}{\ell}$$

und als Basis die Elemente der Gestalt

$$m_{i_1}\wedge\ldots\wedge m_{i_\ell} \text{ mit } 1 \le i_1 < \ldots < i_\ell \le n$$

(ii) Da die $M^{\otimes\ell}$ den A-Modul T(M) erzeugen, erzeugen die $\wedge(M)_\ell$ den Faktormodul $\wedge((M)$,

$$\wedge(M) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \wedge(M)_\ell.$$

Da sich jedes Element der Graßmann-Algebra auf genau eine Weise als Summe homogener Elemente schreiben läßt, ist diese Summe sogar direkt.

$$\wedge(M) = \oplus_{\ell=0}^{\infty} \wedge(M)_\ell.$$

(iii) Die äußeren Potenzen lassen sich in ähnlicher Weise durch eine Universalitätseigenschaft charakterisieren, wie die Tensorpotenzen und die symmetrischen Potenzen. Für jeden A-Modul U bezeichne

$$\wedge(M, N)_\ell$$

den A-Modul der ℓ-linearen schiefsymmetrischen Abbildungen $M\times\ldots\times M \longrightarrow M$. Weiter sei δ_ℓ die natürliche Abbildung

$$\delta_\ell\colon M\times\ldots\times M \xrightarrow{\rho_\ell} M^{\otimes\ell} \longrightarrow \wedge(M)_\ell,\ (x_1,\ldots, x_\ell) \mapsto x_1\wedge\ldots\wedge x_\ell,$$

(welche schiefsymmetrisch ist, denn in $\wedge(V)$ antikommutieren die homogenen Elemente des Grades 1). Dann ist die lineare Abbldung

$$\mathrm{Hom}_A(\wedge(M)_\ell, N) \longrightarrow \wedge(M, N)_\ell,\ \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\circ\delta_\ell,$$

ein Isomorphismus für jeden A-Modul N.

Dies gilt auch für nicht-notwendig freie oder endlich erzeugte A-Moduln M. Sind M und N freie endlich erzeugte A-Moduln, so gilt

$$\mathrm{rank}_A \wedge(M, N)_\ell = \mathrm{rank}_A \wedge(M)_\ell\bullet\mathrm{rank}_A N = \binom{n}{\ell}\bullet\mathrm{rank}_A N \text{ mit } n = \mathrm{rank}_A M.$$

(iv) Der Übergang zu den äußeren Potenzen ist funktoriell. Insbesondere ist für jeden linearen Endomorphismus

$$f\colon M \longrightarrow M$$

eines freien Moduls M vom Rang n die induzierte Abbildung auf der höchsten äußeren Potenz

$$\wedge(f)_n\colon \wedge(M)_n \longrightarrow \wedge(M)_n,\ x \mapsto \det(f)\bullet x$$

gerade die Multiplikation mit der Determanten von f.

Beweis. Die Beweise sind analog zu den Beweisen der entsprechenden Aussagen zur symmetrischen Algebra. Die letzte Aussage ergibt sich durch Wahl einer Basis von M und der zugehörigen Basis des freien Moduls vom Rang $\wedge(M)_\ell$ zusammen mit der Leibnitzschen Determinanten-Formel. Für

$$M = Am_1 + \ldots + Am_n$$

und

$$f(m_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}m_j$$

erhalten wir

$$\wedge(M)_n = Am_1\wedge\ldots\wedge m_n$$

und

$$\begin{aligned} f(m_1\wedge\ldots\wedge m_n) &= f(m_1)\wedge\ldots\wedge f(m_n) \\ &= \Big(\sum_{\alpha_1=1}^{n} a_{\alpha_1 1}m_{\alpha_1 j}\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{\alpha_n=1}^{n} a_{\alpha_n n}m_{\alpha_n}\Big) \\ &= \sum_{\alpha_1=1}^{n} \ldots \sum_{\alpha_n=1}^{n} a_{\alpha_1 1}\bullet\ldots\bullet a_{\alpha_n n}\bullet m_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge m_{\alpha_n} \end{aligned}$$

Summanden, in denen rechts einer der Basis-Vektoren doppelt vorkommt sind dabei gleich Null. Statt unabhängig voneinander über alle α_i zu summieren reicht es über alle Permutationen $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ von $(1, \dots, n)$ zu summieren:

$$f(m_1\wedge\dots\wedge m_n) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}\bullet\dots\bullet a_{\sigma(n)n}\bullet m_{\sigma(1)}\wedge\dots\wedge m_{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\bullet\dots\bullet a_{\sigma(n)n}\bullet m_1\wedge\dots\wedge m_n$$

$$= \det(a_{ij})\bullet m_1\wedge\dots\wedge m_n.$$

QED.

2.4 Die Clifford-Algebra

2.4.1 Die Clifford-Algebra

Seien V ein K-Vektorraum mit symmetrischer bilinearer Abbildung $b: V \times V \longrightarrow K$ und

$$J(V) \subseteq T(V)$$

das von den Elementen der Gestalt

$$v\otimes v - b(v,v) \text{ mit } v\in V$$

erzeugte Ideal. dann heißt

$$C(V) = C_K(V) = T(V)/J(V)$$

Clifford-Algebra von b über K. Die Zusammensetzung

$$V \xrightarrow{i} T(V) \xrightarrow{\rho} C(V)$$

der natürlichen Einbettung (im Grad 1) mit der natürliche Abbildung auf den Faktorring heißt wieder natürliche Einbettung (im Grad 1). Analog definiert man die natürliche Einbettung

$$K \to T(V) \xrightarrow{\rho} C(V)$$

im Grad 0.

Bemerkungen

(i) Ist b identisch Null, so fällt die Clifford-Algebra mit der äußeren Algebra zu sammen, die Clifford-Algebra verallgemeinert also den Begriff der äußeren Algebra.

(ii) Die Injektiviät der natürlichen Einbettungen ist im Fall der Clifford-Algebra weniger offensichtlich als im Fall der symmetrischen oder äußeren Algebren. Sie ergibt als Nebeneffekt einer genaueren Analyse der Struktur der Clifford-Algebra, die wir hier nur skitzieren wollen.

(iii) Schreibt man

$$T(V) = T'(V) \oplus T''(V)$$

mit

$$T'(V) = \oplus_{n=0}^{\infty} T(V)_{2n} \text{ und } T''(V) = \oplus_{n=0}^{\infty} T(V)_{2n+1}$$

so erhält man eine zweite Beschreibung der Tensoralgebra als graduierter Ring, wobei homogene Elemente nur den Grad 0 oder 1 haben können. Dabei muß man den Grad als Restklasse modulo 2 betrachten,

$$\deg x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2 \text{ für x homogen}$$

damit für homogene Elemente x und y weiterhin gilt

$$\deg(xy) = \deg x + \deg y.$$

Bezüglich dieser neuen Graduierung wird das definierende Ideal J(V) der Clifford-Algebra von homogenen Elementen (des Grades 0) erzeugt. Das hat zur Folge, daß auch die Clifford-Algebra eine Graduierung

$$C(A) = C'(A) \oplus C''(A).$$

besitzt. Um diese neue Graduierung von der bisher betrachteten zu unterscheiden, nenne wir die letztere eine $\mathbb{Z}_2$-<u>Graduierung</u>, die erstere eine $\mathbb{Z}$-<u>Graduierung</u>.

(iv) Sind $x, y \in V$ zwei Elemente mit $x \perp y$ bezüglich $b = < , >$, so gilt in C(V):

$$\begin{aligned} x\bullet y + y\bullet x &= (x+y)\bullet(x+y) - x\bullet x - y\bullet y \\ &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \\ &= \langle x , y \rangle + \langle y, x \rangle \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Elemente aus V, die aufeinander senkrecht stehen anit-kommutieren also in C(V),

$x\bullet y \quad = - y\bullet x$ in C(V) für Elemente $x, y \in V$ mit $x \perp y$.

Da jedes Element von C(V) eine Summe von Produkten von Elementen aus V ist, ergibt sich daraus für homogene Elemente

$x\bullet y \quad = (-1)^{\deg x\bullet\deg y}\, y\bullet x \qquad$ für homogene Elemente $x, y\in C(V)$.

2.4.2 Das Tensorprodukt graduierter Algebren

Seien K ein Körper und S, S' zwei K-Algbren. Dann besitzt

$$S\otimes_K S' \tag{1}$$

die Strutur einer K-Algebra mit

$$(s\otimes s')\bullet(t\otimes t') = (st)\otimes(s't') \qquad \text{für } s,t, \in S \text{ und } s',t' \in S'.$$

Sind S und S' graduierte K-Algebren, d.h. zerfallen sie als K-Vektorräume in direkte Summen

$$S = \oplus_{d=0}^{\infty} S_d \text{ und } S' = \oplus_{d=0}^{\infty} S'_d$$

mit

$$S_a\bullet S_b \subseteq S_{a+b} \text{ bzw. } S'_a\bullet S'_b \subseteq S'_{a+b}$$

für alle a und b, so kann man die Multiplikation auf (1) auch so wählen, daß gilt

$$(s\otimes s')\bullet(t\otimes t') = (-1)^{ab}(st)\otimes(s't') \qquad \text{für } s\in S, s'\in S_a, t \in S'_b\ s',t' \in S'.$$

Das Tensorprodukt (1) mit dieser abgeändertern Multiplikation heißt auch <u>graduiertes Tensorprodukt</u> der graduierten K-Algebren S und S' und wird mit

$$S \mathbin{\tilde{\otimes}} S'$$

bezeichnet.

Beweis. Die Abbildung

$$\varphi: S\times S'\times S\times S' \longrightarrow S\otimes_K S',\ (s,s',t,t') \mapsto (st)\otimes(s't'),$$

ist linear in s, t, s' und t'. Sie faktorisiert sich deshalb über die natürliche Abbildung[16]

[16] Wir haben das eigentlsich nur für den Fall S = S' gezeigt. Mit Hilfe der vierten Tensorpotenz von $S\oplus S'$ und deren Universalitätseigenschaft erhält man diese Ausage durch einschränken auf den direken Summannden $S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S$ von $(S\oplus S')^{\otimes 4}$.

$$\rho: S\times S'\times S\times S \longrightarrow S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S,\ (s, s', t, t') \mapsto s\otimes s'\otimes t\otimes t',$$

ins Tensorprodukt:

$$\varphi: S\times S'\times S\times S \xrightarrow{\rho} S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} S\otimes_K S'$$

mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $\tilde{\varphi}$ mit $\varphi = \tilde{\varphi}\circ\rho$, d.h. mit

$$\tilde{\varphi}(s\otimes s'\otimes t\otimes t') = \varphi(s,s',t,t') = (st)\otimes(s't').$$

Durch Zusammensetzen von $\tilde{\varphi}$ mit der natürlichen Abbildung

$\rho': S\otimes_K S' \times S\otimes_K S' \longrightarrow S\otimes_K S'\otimes_K S\otimes_K S',\ (x, y) \mapsto x\otimes y,$

erhalten wir eines Abbildung

$$\psi = \tilde{\varphi}\circ\rho': S\otimes_K S' \times S\otimes_K S' \longrightarrow S\otimes_K S'$$

mit

$$\psi(s\otimes s', t\otimes t') = \tilde{\varphi}(\rho'(s\otimes s', t\otimes t')) = \tilde{\varphi}(s\otimes s'\otimes t\otimes t') = (st)\otimes(s't').$$

Wir haben gezeigt, die oben angegebene Formel für die Multiplikation in $S\otimes_K S'$ beschreibt eine wohldefinierte Abibldung.
Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß die so definierte Multiplikation die üblichen Eigenschaften hat und $S\otimes_K S'$ mit der Struktur einer K-Algebra versieht.

Die modifizierte Formel für die Multiplikation im Fall graduierter K-Algebren

$$S = \oplus_{n=0}^{\infty} S_n \text{ und } S' = \oplus_{n=0}^{\infty} S'_n$$

ergibt sich aus der eben konstruierten durch Zusammensetzen mit einem linearen Endomorphismus von

$$S\otimes_K S' = \oplus_{n=0}^{\infty} \oplus_{a+b=n} S_a\otimes S'_b,$$

der auf $S_a\otimes S'_b$ in der Multiplikation mit $(-1)^{ab}$ besteht.
QED.

2.4.3 Die Universalitätseigenschaft der Clifford-Algebra

Seien V ein K-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform

$$b: V \times V \longrightarrow K.$$

Für jede K-Algbra S und jede K-lineare Abbildung

$$f: V \longrightarrow S$$

mit

$$f(v)^2 = b(v,v)\cdot 1_S$$

gibt es genau einen K-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{f}: C(V) \longrightarrow S$$

mit

$$f = \tilde{f}\circ i,$$

wobei $i: V \longrightarrow C(V)$ die oben beschriebene natürliche Einbettung bezeichne.

Beweis. Auf Grund der Universalitätseigenschaft der Tensor-Algebra läßt sich f auf genau eine Weise zu einem K-Algebra-Homomorphismus

$$f': T(V) \longrightarrow S$$

fortsetzen. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, das definierende Ideal J(V) der Clifford-Algebra

$$C(V) = T(V)/J(V)$$

liegt ganz im Kern von f',

$$J(V) \subseteq \mathrm{Ker}(f'), \tag{1}$$

denn dann faktorisiert sich f' eindeutig über die natürliche Abbildung $T(V) \longrightarrow C(V)$. Zum Beweis von (1) reicht es zu zeigen, ein Erzeugendensystem des Ideals J(V) liegt ganz im Kern von f', d.h. es reicht zu zeigen,

$$f'(\, v \otimes v - b(\, v, v)\,) = 0$$

für jedes $v \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(\, v \otimes v - b(v, v)) &= f'(v \otimes v\,) - f'(b(v,v))\bullet 1) \\ &= f'(v)\bullet f'(v) - b(v,v)\bullet f(1) \\ &= f(v)^2 - b(v,v)\bullet 1_S \\ &= 0. \end{aligned}$$

QED.

2.4.4 Die Clifford-Algebra einer orthogonalen direkten Summe

Seien V ein K-Vektorraum mit der Bilinearform

$$b: V \times V \longrightarrow K$$

und

$$V = V' \oplus V''$$

eine orthogonale direkte Zerlegung mit zweil K-linearen Unterräumen V' und V''.
Dann ist die Clifford-Algebra von V,

$$C(V) \cong C(V')\tilde{\otimes}C(V''),$$

isomorph zum graduierten Tensorprodukt der Clifford-Algebren von V' und V'' (bezüglich der $\mathbb{Z}_2$-Graduierung der Clifford-Algebra).

Beweis. d auf der rechten Seite besitzt die Universalitätseigenschaft von C(V). Nach Bemerkung 2.15 (iv) und 2.16 stimmen die Multiplikationen auf beiden Seiten überein.
QED.

2.4.5 Die Clifford-Algebra von $<c_1,...,c_n>$

Seien V der K-Vektoraum mit symmetrischer Bilinearform

$$V = <c_1,...,c_n>$$

und bezeichne wie üblich

$$e_1,..., e_n \in V = K^n$$

die Standard-Basis. Dann gilt

$$C(<c_1,...,c_n>) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} Ke_{i_1}\bullet e_{i_2}\bullet ...\bullet e_{i_k}$$

wobei die Erzeuger

$$1, e_1, \dots, e_n, \dots, e_{i_1} \bullet e_{i_2} \bullet \dots \bullet e_{i_k}, \dots, e_1 \bullet \dots \bullet e_n$$

(mit $i_1 < \dots < i_k$) linear unabhängig sind. Weiter ist

$$e_i \bullet e_j = - e_j \bullet e_i \text{ und } e_i^2 = c_i.$$

Insbesondere ist $V = K^n = Ke_1 + \dots + Ke_n$ ein linearer Unterraum der Clifford-Algebra, und es gilt

$$\dim C(<c_1,\dots,c_n>) = 2^n$$

Beweis. Nach 2.18 gilt

$$C(<c_1,\dots,c_n>) = C(<c_1>) \otimes \dots \otimes C(<c_n>),$$

und die Berechnung von C(V) ist damit auf den 1-dimensionalen Fall reduziert.

Im Fall $V = <c>$ ist

$$T(V) = K[T]$$

der Polynomring über K in der Unbestimmten $T = e_1$ und

$$J(V)$$

ist das Ideal welches von den Elementen der Gestalt

$$v \otimes v - b(v,v) = (\lambda T)^2 - \lambda^2 c = \lambda^2 (T^2 - c)$$

mit $v = \lambda e_1$ erzeugt wird, d.h. J(V) besteht aus den Vielfachen des Polynoms $T^2 - c$,

$$J(V) = (T^2 - c)K[T].$$

Ist t die Restklasse von T, so gilt

$$C(<c>) = K + K \bullet t + K \bullet t^2 + \dots$$

und $t^2 = c$, d.h.

$$C(<c>) = K + K \bullet t \text{ mit } t^2 = c$$

Insbesondere ist

$$\dim_K C(<c>) = 2.$$

Damit erhalten wir für $V = <c_1,\dots,c_n>$:

$$\dim C(<c_1,\dots,c_n>) = 2^n$$

und

$$C(<c_1,\dots,c_n>) = \oplus_{k=0}^n \oplus_{i_1 < \dots < i_k} Ke_{i_1} e_{i_2} \bullet \dots \bullet e_{i_k}$$

QED.

Beispiel.

Für $K = \mathbb{R}$ und $V = <-1,-1>$ ist

$$C(V) = \mathbb{R} + \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_1e_2$$

und

$$e_1^2 = -1,$$
$$e_2^2 = -1,$$

Wegen $e_2e_1 = - e_1e_2$ erhalten wir weiter

$$(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = - (e_1e_1)(e_2e_2) = -1.$$

Als Clifford-Algebra von <-1, -1> erhalten wir gerade die Algbra der Hamiltonschen Quaternionen.

3 Halbeinfache Ringe und Moduln

(frei nach dem 17. Kapitel von Lang [2])

3.1 Matrizen und lineare Abbildungen über nicht-kommutativen Ringen

In Kapitel XIII haben wir ausschließlich Matrizen über kommutativen Ringen betrachtet. Für unsere gegenwärtigen Ziele müssen wir eine allgemeinere Situation untersuchen.

3.1.1 Matrizen über einem Ring

Sei K ein Ring. Eine m×n-Matrix mit Einträgen aus K wird in derselben Weise definiert wie im Fall kommutativer Ringe: es ist eine endliche Familie

$$M = (c_{ij})_{i=1,...,m,j=1,...,n}$$

von m•n Elementen aus K, die man sich in rechteckiger Gestalt zu m Zeilen mit je n Elementen angeordnet denkt,

$$M = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Das Paar (m, n) heißt Typ der Matrix und wird mit

$$\text{type } M := (m,n)$$

bezeichnet. Die Zahlen m und n heißen Zeilenzahl bzw. Spaltenzahl und werden mit

$$r(M) := m \text{ und } c(M) := n$$

bezeichnen.

Die Summe und das Produkt von Matrizen werden durch dieselben Formeln definiert:

$$(c_{ij}) + (d_{ij}) := (c_{ij} + d_{ij}) \qquad \text{falls typ } (c_{ij}) = \text{typ } (d_{ij})$$

$$(c_{ij}) \bullet (d_{ij}) := (\sum_{\alpha=1}^{b} c_{i\alpha} \bullet d_{\alpha j}) \quad \text{falls } c(c_{ij}) = r(d_{ij}).$$

Bemerkungen

(i) Nach wie vor gelten die Assoziativgesetze und Distributivgesetz (falls die Typen der Matrizen so beschaffen sind, daß sich die Operationen ausführen lassen):

$$(M' + M'') + M''' = M' + (M''+M''')$$
$$(M' \bullet M'') \bullet M''' = M' \bullet (M'' \bullet M''')$$
$$(M' + M'') \bullet M''' = M' \bullet M''' + M'' \bullet M'''$$

$M'\bullet (M'' + M''') = M'\bullet M'' + M'\bullet M''')$

(ii) Die m×n-Matrizen mit Einträgen aus K

$$K^{m\times n} = \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$$

bilden sowohl einen linken als auch einen rechten K-Modul.

(iii) Die quadratischen Matrizen

$$\mathrm{Mat}_n(K) := K^{n\times n}$$

bilden einen Ring.

(iv) Es gibt einen Ring-Homomorphismus

$$K \to \mathrm{Mat}_n(K),\ c \mapsto c\cdot\mathrm{Id}$$

3.1.2 Schiefkörper

Ein Schiefkörper ist ein Ring mit 1 ($\neq 0$), in welchem jedes von Null verschiedene Element ein Inverses besitzt.

Bemerkungen

(i) Jeder Modul M über einem Schiefkörper K besitzt eine Basis.
(ii) Die Mächtigkeit von je zwei Basen ist gleich.
(iii) Die Mächtigkeit einer Basis heißt Dimension des Moduls und wird mit

$$\dim_K M$$

bezeichnet.

(iv) Moduln über K heißen auch Vektorräume.

(v) Eine K-lineare Abbildung $\varphi: V' \to V''$ endlich-dimensionaler K-Vektorräumen besitzt bezüglich gegebener Basen

$$v' = (v'_1,\dots,v'_{n'}) \text{ von } V' \text{ und } v'' = (v''_1,\dots,v''_{n''}) \text{ von } V''$$

eine Matrix

$$M^{v'}_{v''}(\varphi) = (c_{ij}) \in K^{n''\times n'}.$$

Die Einträge c_{ij} der Matrix sind durch die Bedingungen

$$f(v'_i) = c_{1i}v''_1 + \dots + c_{n''i}v''_{n''} \quad (i=1,\dots,n')$$

bestimmt.

3.1.3 Matrizen von linearen Abbildungen zwischen direkten Summen

Seien R ein Ring,

$$\{M_i\}_{i\in I} \text{ und } \{N_j\}_{j\in J}$$

zwei endliche Familien von R-Moduln und

$$M := \oplus_{i\in I} M_i \text{ und } N := \oplus_{j\in J} N_j$$

deren direkte Summen. Dann ist die Abbildung

$$\oplus_{i\in I, j\in J} \mathrm{Hom}_R(M_i\,,\, N_j) \to \mathrm{Hom}_R(M\,,\, N) \tag{1}$$

$$(f_{ji}: M_i \longrightarrow N_j)_{i\in I, j\in J} \mapsto ((m_i)_{i\in I} \mapsto (\textstyle\sum_{i\in I} f_{ji}(m_i))_{j\in J}$$

R-linear und bijektiv. Die Umkehrung dieser Abbildung kann man wir folgt beschreiben. Seien

$$\pi_j: N \longrightarrow N_j\,,\ (n_\alpha)_{\alpha\in J} \mapsto n_j,$$

die Projektion auf die j-te Koordinate und

$$q_i: M_i \longrightarrow M,\ x \mapsto \{\delta_{i\alpha}\cdot x\}_{\alpha\in I}$$

die natürliche Einbettung, welche M_i mit dem Teilmodul der direkten Summe identifiziert, dessen Elemente nur an der i-ten Stelle von 0 verschiedene Einträge besitzen. Die Umkehrung von (1) hat dann die Gestalt

$$\mathrm{Hom}_R(M\,,N) \longrightarrow \oplus_{i\in I,j\in J}\mathrm{Hom}_R(M_i\,,N_j),\ \varphi \mapsto M(\varphi) := (\pi_j\circ f\circ q_i\,)_{i\in I,j\in J}$$

Die Elemente von

$$\mathrm{Hom}_R(M\,,N)$$

sind deshalb durch die zugehörige Matrix

$$M(\varphi) = (f_{ij})_{i\in I} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1s}\\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2s}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{r1} & f_{r2} & \dots & f_{rs}\end{pmatrix} \text{ mit } f_{ji} = \pi_j\circ f\circ q_i: M_i\longrightarrow N_j$$

von R-linearen Abbildungen f_{ij} eindeutig bestimmt - und umgekeht definiert jede Matrix von R-linearen Abbildung $f_{ji}: M_i\longrightarrow N_j$ ein Element von $\mathrm{Hom}_R(M\,,N)$.

Die Anwendung linearen Abbildung $\varphi: M \longrightarrow N$ entspricht dabei der Matrizen-Multiplikation mit $M(\varphi)$.

$$f(m) = f\begin{pmatrix} m_1\\ \dots\\ m_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1s}\\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2s}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{r1} & f_{r2} & \dots & f_{rs}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1\\ \dots\\ m_s\end{pmatrix}$$

Bemerkungen

(i) Für jeden R-Modul M und jede natürliche Zahl hat man insbesondere einen Isomorphismus von Ringen

$$\mathrm{End}_R(M^{(n)}) \to \mathrm{Mat}_n\,(K),$$

Dabei sei

$$K := \mathrm{End}_R M$$

der Endomorphismen-Ring des R-Moduls m und

$$M^{(n)}$$

bezeichne die n-fache direkte Summe von M.

(ii) Betrachten wir den Fall, daß

$$R = D \text{ ein Schiefkörper}$$

und

$$M = D\cdot v\,,\ v \in M - \{0\},$$

ein eindimensionaler D-Vektorrauam ist. Mit Hilfe des Basis-Vektors v, können wir M mit dem D-Vektorraum D identifizieren,

$$D \xrightarrow{\cong} M = D\cdot v,\ x \mapsto x\cdot v,$$

und K mit

$$K \cong \mathrm{End}_D\, D.$$

Eine d-lineare Abbildung f: $D \longrightarrow D$ ist durch ihren Wert an der Stelle 1 bestimmt:

$$f(x) = f(x\bullet 1) = x\bullet f(1),$$

d.h.

$$f = f_a \text{ mit } f_a(x) = x\bullet a \text{ und } a := f(1).$$

Wir erhalten so eine surjektive Abbildung

$$D \longrightarrow K = \mathrm{End}_D\, D,\ a \mapsto f_a.$$

Wegen $f_a(1) = a$ ist sie auch injektiv. Außerdem gilt

f_{a+b}	$= f_a + f_b$	(Distributivgesetz in D)[17]
f_1	$= \mathrm{Id}$	(wegen $f_1(x) = x\bullet 1 = x$)
f_{ab}	$= f_b \circ f_a$	(Assoziativgesetz in D)[18]

Mit anderen Worten, dies ist ein Anti-Isomorphismus. Dies ist im wesentlichen der einzige Unterschied zum kommutativen Fall (von Vektorräume über Körpern).

3.1.4 Einfache Moduln

Ein R-Modul M heißt einfach, wenn er $\ne 0$ ist und keine nicht-trivialen Teilmoduln besitzt, d.h. 0 und M sind seine einzigen Teilmoduln.

3.1.5 Proposition 1: Lemma von Schur

Seien R ein Ring und $f:M \to N$ eine R-lineare Abbildung einfacher R-Moduln. Dann ist f entweder die 0-Abbildung oder ein Isomorphismus. Der Ring $\mathrm{End}_R(M)$ ist ein Schiefkörper.

Beweis. Sei f von Null verschieden. Dann ist Ker(f) ein echter Teilmodul von M also gleich Null,

$$\mathrm{Ker}(f) = 0.$$

Außerdem ist $\mathrm{Im}(f) \subseteq N$ nicht der 0-Modul, also gleich N,

$$\mathrm{Im}(f) = N.$$

Die Abbildung f ist somit bijektiv, also ein Isomorphismus.
Jedes von Null verschiedene Element des Rings $\mathrm{End}_R(M)$ ist damit umkehrbar, d.h. der Endomorphismen-Ring ist ein Schiefkörper.
QED.

3.1.6 Proposition 2: der Endomorphismen-Ring einer direkten Summe einfacher Moduln

Seien R ein Ring, $M_1,...,M_r$ paarweise nicht-isomorphe einfache R-Moduln und

$$M = M_1^{(n_1)} \oplus ... \oplus M_r^{(n_r)}$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{n_1}(\mathrm{End}_R(M_1)) \times ... \times \mathrm{Mat}_{n_r}(\mathrm{End}_R(M_r)) &\xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}_R(M) \\ (A_1,...,A_r) &\mapsto ((m_1,...,m_r) \mapsto (A_1 m_1,...,A_r m_r)) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Ringen.

---

[17] $f_{a+b}(x) = x\bullet(a+b) = x\bullet a + x\bullet b = f_a(x) + f_b(x) = (f_a+f_b)(x)$

[18] $f_a(\ (x)) = f_a(x\bullet b) = x\bullet(b\bullet a) =$

$f_{a\bullet b}(x) = x\bullet a\bullet b = f_b(x\bullet a) = f_b(f_a(x)) = (f_b\circ f_a)(x)$

In jeder solchen Zerlegung eines Moduls M in eine direkte Summe endlich vieler einfacher R-Moduln sind die direkten Summanden M_i bis auf Isomorphie und deren Vielfachheiten n_i eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Abbildung ist offensichtlich additiv und multiplikativ[19], d.h. ein Ringhomomorphismus (von Ringen mit 1). Er ist weiterhin offensichtlich injektiv. Beweisen wir seine Surjektivität.

Sei $f\in\mathrm{End}_R(M)$. Als Abbildung mit Werten in M hat f die Gestalt

$$f = (f_1,...,f_r)$$

mit R-linearen Abbildungen

$$f_i: M \to M_i^{(n_i)}$$

Die Einschränkung von f_i auf den j-ten direkten Summanden wird durch eine Matrix beschrieben, deren Einträge R-lineare Abbildung $M_j \to M_i$ sind. Für $j \ne i$ kann es sich nicht um Isomorphismen handeln, d.h. nach 3.1.5 handelt es sich um 0-Abbildungen. Die Einschränkung von f_i auf den j-ten direkten Summanden mit $j \ne i$ ist demnach Null. Es folgt

$$f_i(m_1,...,m_r) = (0,...,0,A_i(m_i),0,...,0) \text{ mit } A_i\in\mathrm{Mat}_{n_i}(\mathrm{End}_R(M_i),$$

also

$$f(m_1,...,m_r) = (A_1m_1,...,A_rm_r).$$

Die Eindeutigekeitsaussage ist eine Variante des Satzes von Jordan-Hölder.

QED.

3.1.7 Vielfachheiten und Längen

In der Situation von 3.1.6 heißt die Zahl n_i Vielfachheit, mit welcher M_i im Modul

(1) $$M = M_1^{(n_1)}\oplus...\oplus M_r^{(n_r)}$$

vorkommt. Die Zahl

$$\mathrm{length}(M) := n_1+...+n_r$$

heißt Länge des Moduls M. Identiät (1) werden wir manchmal auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$M = n_1M_1\oplus...\oplus n_rM_r$$

3.2 Halbeinfache Moduln

3.2.1 Vereinbarung

Sei R ein Ring. Wenn nicht explizit anders erwähnt nehmen wir in diesem Abschnitt an, daß alle Moduln R-Moduln und alle Homomorphismen R-lineare Abbildungen sind.

3.2.2 Kriterium der Halbeinfachheit

Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind folgenden Bedingungen äquivalent.

(SS1) M ist eine Summe von einfachen R-Moduln.

(SS2) M ist direkte Summe von einfachen R-Moduln.

---

[19] bezüglich von koordinatenweiser Addition und multiplikation im direkten Produkt auf der linken Seite.

(SS3) Jeder Teilmodul $N \subseteq M$ ist ein direkter Summand von M, d.h. es gibt einen Teilmodul N' mit $M = N \oplus M'$.

Bemerkungen

(i) Ein Modul M über dem Ring R heißt halbeinfach, wenn er den äquivalenten Bedingungen (SS1) - (SS3) benügt.[20]

(ii) Jeder von 0 verschiedene Teilmodul eines halbeinfachen Moduls einthält einen einfachen Teilmodul.

Beweis. 1. Schritt. Sei $M = \sum_{i\in I} M_i$ eine (nicht-notwendig direkte) Summe von einfachen Teilmoduln. Dann existiert eine Teilmenge $J \subseteq I$ derart, daß

$$M = \sum_{i\in J} M_i = \bigoplus_{i\in J} M_i .$$

gilt und die Summe direkt ist.

(Insbesondere besteht die Implikation (SS1) $\Rightarrow$ (SS2)). Sei

S

die Menge aller Teilmengen $J \subseteq I$, für welche die Summe

$$\sum_{j\in J} M_j = \bigoplus_{j\in J} M_j \qquad (1)$$

direkt ist. Die Menge S ist nicht leer: alle einelementigen Teilmengen von I liegen in J. Die Menge S ist halbgeordnet bezüglich der Inklusionsrelation. Für jede linear geordnete Teilmenge von S ist die Vereinigung der Elemente dieser Teilmenge ein Element von S (weil nur endlich viele Koordinaten eines Elements einer direkten Summe ungleich 0 sind). Damit besitzt jede linear geordnete Teilmenge von S eine obere Schranke in S. Nach dem Zornschen Lemma gibt es in S ein maximales Element. Sei

J

ein solches.Es reicht zu zeigen, jedes M_i liegt in der Summe (1) (sodaß diese gleich M ist). Im Fall $i \in J$ ist das trivialerweise der Fall, sei also $i \in I - J$.

Der Durchschnitt der Summe (1) mit M_i ist ein Teilmodul von M_i, also gleich 0 der gleich M_i.

Im ersten Fall bleibt die Summe (1) direkt, wenn man i zur Menge J hinzufügt, was im Widerspruch zur Maximalität von J steht. Also tritt der erste Fall nicht ein. Im zweiten Fall liegt aber M_i in der Summe (1).

2. Schritt. Es besteht die Implikation (SS2) $\Rightarrow$ (SS3).

Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Bedingung (SS3) ist trivialerweise für N erfüllt, wenn N = M ist. Sei also

$N \subset M$ ein echter Teilmodul.

Sei

S

[20] Die Bezeichnungsweise (SSi), i=1,2,3 , kommt von semi-simple (Englisch für halbeinfach).

die Menge aller Teilmengen $J \subseteq I$, für welche die Summe

$$N + \sum_{j\in J} M_j = N \oplus \sum_{j\in J} M_j \qquad (2)$$

direkt ist. Weil N ein echter Teilmodul von M ist, gibt es ein M_i welches nicht in N liegt. Weil M_i einfach ist, gilt dann $N \cap M_i = 0$, d.h. die Summe $N+M_i$ ist direkt und

$$M_i \in S.$$

Die Menge S ist somit nicht leer. Dieselbe Argumentation wie im ersten Schritt zeigt, daß S ein maximales Element J enthält und für dieses maximale Element die Summe (2) gleich M ist, d.h. es gilt (SS3).

3. <u>Schritt</u>. Es gelte (SS3). Dann enthält jeder von 0 verschiedene Teilmodul $N \subseteq M$ einen einfachen Teilmodul (d.h. es gilt die Aussage von Bemerkung (ii)).

Sei N ein von 0 verschiedener Teilmodul von M. Wir wählen ein von 0 verschiedenes Element in N, sagen wir

$$0 \neq n \in N.$$

Wir betrachten die R-lineare Surjektion

$$R \longrightarrow R\bullet n,\ r \mapsto r\bullet n. \qquad (3)$$

Ihr Kern ist ein Linksideal von $\ell \subseteq R$, welches echt enthalten ist in R (weil die Surjektion nicht identisch 0 ist),

$$\ell \subset R \text{ echtes Linksideal.}$$

Nach dem Zornschen Lemma liegt ℓ in einem maximalen Linksideal m von R,

$$\ell \subseteq m \subset R, \text{ m maximales Linksideal von R.}$$

Die Surjektion (3) induziert eine R-lineare Abbildung

$$R/\ell \longrightarrow R\bullet n,\ r \bmod \ell \mapsto r\bullet n.$$

Das Bild von m/ℓ bei dieser Abbildung ist ein maximaler von $R\bullet n$ verschiedener Teilmodul

$$m\bullet n \subseteq R\bullet n, \text{ } m\bullet n \text{ maximal unter den echten Teilmoduln von } R\bullet n.$$

Nach Voraussetzung (SS3) können wir M als direkte Summe

$$M = m\bullet n + M' = m\bullet n \oplus M'$$

schreiben mit einem Teilmodul $M' \subseteq M$. Wegen $m\bullet n \subseteq R\bullet n$ gilt

$$R\bullet n = m\bullet n + M'\cap R\bullet n = m\bullet n \oplus (M'\cap R\bullet n).$$

Für jeden von 0 verschiedenen echten Teilmodul $M'' \subseteq M'\cap R\bullet n$ wäre

$$m\bullet n + M'\cap R\bullet n$$

ein echter Teilmodul von $R\bullet n$, welcher $m\bullet n$ als echten Teilmodul enthält. Das widerspricht der Maximalitäg von $m\bullet n$ in $R\bullet n$. Also gibt es keinen solchen echten Teilmodul M'', d.h. jeder echte Teilmodul von $M'\cap R\bullet n$ ist gleich 0. Deshalb ist

$M'\cap R\bullet n$

ein einfacher Teilmodul von $R\bullet n$, also von N.

4. <u>Schritt</u>. Es besteht die Implikation (SS3) $\Rightarrow$ (SS1).

Sei M_0 die Summe aller einfachen Teilmoduln von M. Es reicht zu zeigen, $M_0 = M$. Angenommen, M_0 ist ein echter Teilmodul von M. Nach Voraussetzung (SS3) gibt es dann einen von 0 verschiedenen Teilmodul N mit

$$M = M_0 \oplus N,\ N \neq 0.$$

Nach dem dritten Schritt gibt es einen einfachen Teilmodul in N. Nach Definition von M_0 müßte dieser aber in M_0, was der Wahl von N widerspricht (die Summe M_0+N wäre nicht direkt). Dieser Widerspruch zeigt, es muß $M = M_0$ gelten.

QED.

3.2.3 Proposition 3: Teilmoduln und Faktormoduln halbeinfacher Moduln

Jeder Teilmodul und jeder Faktormodul eines halbeinfachen Moduls ist halbeinfach.

Beweis. Seien M ein halbeinfacher R-Modul und $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Weiter sei

$$N_0$$

die Summe aller einfachen Teilmoduln von N. Nach 3.2.2 (SS3) können wir M in der Gestalt

$$M = N_0 \oplus N'_0 \qquad (1)$$

schreiben mit einem Teilmodul N'_0 von M. Jedes Element $x \in N$ besitzt dann genau eine Darstellung

$$x = x_0 + x'_0 \text{ mit } x_0 \in N_0 \text{ und } x'_0 \in N'_0.$$

Nun ist aber $x'_0 = x - x_0 \in N$, d.h. es ist $N = N_0 + N \cap N'_0$ und diese Summen-Zerlegung ist direkt (wegen (1)):

$$N = N_0 \oplus (N \cap N'_0). \qquad (2)$$

Wäre der Durchschnitt $N \cap N'_0$ ungleich 0, so würde er einen einfachen Teilmodul enthalten (auf Grund der Aussagen des dritten Schritts im Beweis von 3.2.2). Dieser einfache Teilmodul müßte aber in N_0 liegen (nach Definition von N_0), was der direkten Summenzerlegung (2) widerspricht. Dieser Widerspruch zeigt, es gilt $N \cap N'_0$, also

$$N = N_0.$$

Also ist N halbeinfach.

Wir haben noch die Halbeinfachheit von M/N zu beweisen. Dazu schreiben wir M in der Gestalt

$$M = N \oplus N'$$

mit einem Teilmodul N' von M (vgl. 3.2.2 (SS3)). Wie wir gerade gesehen haben ist jeder Teilmodul von M halbeinfach. Insbesondere ist N' halbeinfach. Die natürliche Projektion

$$M = N \oplus N' \longrightarrow N'$$

auf den zweiten direkten Summanden induziert einen Isomorphismus

$$M/N \xrightarrow{\cong} N'.$$

Deshalb ist mit N' auch M/N halbeinfach.

QED.

3.3 Dichtesatz

3.3.1 Lemma: Die Modul-Struktur über End(M)

Seien R ein Ring, M ein R-Modul und

$$K := \mathrm{End}_R(M)$$

Wir versehen M mit der K-Modul-Struktur

$$K \times M \longrightarrow M,\ (\varphi, x) \mapsto \varphi(x). \tag{1}$$

Die Abbildung

$$R \longrightarrow \mathrm{End}_K(M),\ a \mapsto f_a, \tag{2}$$

mit

$$f_a(x) := ax$$

ist wohldefiniert und ein Homomorphismus von Ringen mit 1.

Ist der R-Modul M hableinfach, so gibt es für jedes $\phi \in \mathrm{End}_K(M)$ und jedes $x \in M$ ein $\alpha \in R$ mit

$$\phi(x) = f_\alpha(x).$$

Beweis. 1. Schritt. M ist K-Modul mit der Multiplikation (1).

Als R-Modul ist M eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition. Für (1) gelten die Distributivgesetze: für $\varphi, \varphi', \varphi'' \in K$, $x, y \in M$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi\bullet(x+y) &= \varphi(x+y) \\
&= \varphi(x) + \varphi(y) \quad (\varphi\in K \text{ ist R-linear}) \\
&= \varphi\bullet x + \varphi\bullet y. \\
(\varphi'+\varphi'')\bullet x &= (\varphi'+\varphi'')(x) \\
&= \varphi'(x) + \varphi''(x) \\
&= \varphi'\bullet x + \varphi''\bullet x.
\end{aligned}$$

Weiter gilt das Assoziativgesetz: für $\varphi', \varphi'' \in K$ und $x \in M$ gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi'\bullet\varphi'')\bullet x &= (\varphi'\circ\varphi'')(x) \\
&= \varphi'(\varphi''(x)) \\
&= \varphi'\bullet(\varphi''\bullet x).
\end{aligned}$$

Schließlich operiert das Einselement von K wie die identische Abbildung (weil es die identische Abbildung ist).

2. Schritt. (2) ist ein wohldefinierter injektiver Homomorphismus von Ringen mit 1.

Für $a \in R$, $x, y \in M$ und $\varphi \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
f_a(x+y) &= a\bullet(x+y) \\
&= a\bullet x + a\bullet y \\
&= f_a(x) + f_a(y)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f_a(\varphi\bullet x) &= f_a(\varphi(x)) \\
&= a\bullet\varphi(x) \\
&= \varphi(a\bullet x) \qquad (\varphi\in K \text{ ist R-linear}) \\
&= \varphi\bullet f_a(x).
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich, f_a ist eine K-lineare Abbildung für jedes $a \in R$. Die Abbildung (2) ist damit wohldefiniert.

Bezeichnen wir die Abbildung (2) mit f,

$$f: R \longrightarrow \mathrm{End}_K(M),\ a \mapsto f(a) := f_a,$$

Für a, b $\in$ R und x $\in$ M gilt

$$\begin{aligned} f(a+b)(x) &= f_{a+b}(x) \\ &= (a+b)\bullet x \\ &= a\bullet x + b\bullet x \\ &= f_a(x) + f_b(x) \\ &= (f_a + f_b)(x) \\ &= (f(a) + f(b))(x) \end{aligned}$$

Weil x $\in$ M beliebig gewählt wurde, folgt

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ für } a,b \in R.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} f(a\bullet b)(x) &= f_{a\bullet b}(x) \\ &= (a\bullet b)\bullet x \\ &= a\bullet(b\bullet x) \\ &= f_a(f_b(x)) \\ &= (f_a\circ f_b)(x) \\ &= (f(a)\circ f(b))(x), \end{aligned}$$

also

$$f(a\bullet b) = f(a)\circ f(b) \text{ für } a, b \in R$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} f(1)(x) &= f_1(x) \\ &= 1\bullet x \\ &= x \end{aligned}$$

also

$$f(1) = Id.$$

Wir haben gezeigt, f ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1.
3. <u>Schritt</u>. Beweis des verbleibenden Teils der Behauptung.
Seien x $\in$ M und $\phi \in End_K(M)$. Weil M halbeinfach ist, gibt es eine Zerlegung in eine direkte Summe

$$M = R\bullet x \oplus N$$

mit einem Teilmodul N. Sei

$$\pi: M \longrightarrow R\bullet x\ (\subseteq M)$$

die Projektion auf den ersten direkten Summanden. Als R-lineare Abbildung liegt π in

$$\pi \in K = End_R(M).$$

Weil ϕ eine K-lineare Abbildung ist, gilt

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(\pi(x)) && (\pi \text{ ist die Projektion auf den direkten Summanden } R\bullet x) \\ &= \phi(\pi\bullet x) \\ &= \pi\bullet\phi(x) && (f \text{ ist K-linear und } \pi\in K) \\ &= \pi(\phi(x)) \\ &\in R\bullet x. \end{aligned}$$

Also gibt es ein $\alpha\in R$ mit $\alpha\bullet x = \phi(x)$.
QED.
Bemerkung
Der Dichte-Satz verallgemeinert die Aussage des obigen Lemma auf den Fall von endlich vielen vorgegebenen x.

3.3.2 Satz 1: Dichtesatz von Jacobson
Seien R ein Ring, M ein halbeinfacher R-Modul, $K = End_R(M)$,

$$\phi \in End_K(M),$$

ein K-linearer Endomorphismus von M und

$$m_1,...,m_n \in M$$

endlich viele Elemente. Dann gibt es ein $\alpha \in R$ mit

$$\phi(m_i) = \alpha\cdot m_i \text{ für } i = 1, ... , n.$$

Beweis. Wir betrachten die durch ϕ auf einer direkten Summe von n Exemplaren von M induzierte Abbildung:

$$\phi^{(n)}: M^{(n)} \longrightarrow M^{(n)}, (x_1,...,x_n) \mapsto (f(x_1),...,\phi(x_n)).$$

Wir setzen

$$K' := End_R(M^{(n)}) \cong Mat_n(K).$$

Der Isomorphismus rechts ist der von Bemerkung 3.1.3 (i). Die Operation von K' auf $M^{(n)}$ wird dadurch zu einer Art Matrizen-Multiplikation: für $\xi \in K'$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in M^{(n)}$

ist

$$\xi\cdot x = M(\xi)\cdot x = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{1\alpha}x_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{2\alpha}x_\alpha \\ \dots \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{n\alpha}x_\alpha \end{pmatrix}, M(\xi) = (\xi_{ij}) \in K^{n\times n}.$$

Nach Definition von $\phi^{(n)}$ ist

$$\phi^{(n)}(\xi\cdot x) = \begin{pmatrix} \phi(\sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{1\alpha}x_\alpha) \\ \phi(\sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{2\alpha}x_\alpha) \\ \dots \\ \phi(\sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{n\alpha}x_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{1\alpha}\phi(x_\alpha) \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{2\alpha}\phi(x_\alpha) \\ \dots \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_{n\alpha}\phi(x_\alpha) \end{pmatrix} \qquad (\phi \text{ ist K-linear und } \xi_{ij} \in K)$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \phi(x_1) \\ \dots \\ \phi(x_n) \end{pmatrix}$$

$$= M(\xi)\bullet\phi^{(n)}(x)$$
$$= \xi\bullet \phi^{(n)}(x).$$

Wir haben gezeigt, $\phi^{(n)}$ ist eine K'-lineare Abbildng, d.h. es gilt

$$\phi^{(n)} \in K'.$$

Mit M ist auch $M^{(n)}$ ein halbeinfacher R-Modul. Nach Lemma 3.3.1 gibt es ein $\alpha\in R$ mit

$$\phi^{(n)}(m) = \alpha\bullet m \text{ für } m := \begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_n \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} \phi(m_1) \\ \dots \\ \phi(m_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\bullet m_1 \\ \dots \\ \supseteq\alpha\bullet m_n \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\phi(m_i) = \alpha\bullet m_i \text{ für } i = 1,\dots,n$$

QED.

3.3.3 Folgerung 1: Satz von Burnside

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und

$$R \subseteq End_k(V)$$

eine k-Teilalgebra. Falls V ein einfacher R-Modul ist, so gilt $R = End_k(V)$.

Beweis. 1. Schritt. $K:= End_R(V) = k$.

Weil R eine k-Algebra ist, d.h. $k = k\cdot 1_R$ liegt im Zentrum von R, definiert die Multiplikation mit Elementen aus k einen Homomorphismus von Ringen mit 1: Zumindest haben wir einen Homomorphismus von Ringen mit,

$$k \longrightarrow K = \mathrm{End}_R(V),\ c \mapsto f_c\,, \tag{1}$$

mit

$$f_c(v) := c\cdot v \text{ für } v \in V,$$

denn für $c\in k$, $r \in R$, $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} f_c(r\cdot v) &= c\cdot r\cdot v \\ &= r\cdot c\cdot v \quad \text{(R ist eine k-Algebra, d.h. } k = k\cdot 1_R \text{ liegt im Zentrum von R)} \\ &= r\cdot f_c(v), \end{aligned}$$

d.h. f_c ist R-linear für jedes $c \in k$. Wir können k mit seinem Bild in K identifizieren,

$$k \subseteq K.$$

Weil die Elemente von K lineare Abbildungen über R sind, kommutiert jedes Element von k mit jedem Element von K.

Weil V als R-Modul einfach ist, ist

$$K = \mathrm{End}_R(V) \text{ ein Schiefkörper}$$

(nach dem Lemma von Schur 3.1.5). Sei jetzt

$$\alpha\in K.$$

Dann ist $k[\alpha]$ nullteilerfreier kommutativer Ring mit 1 (weil K als Schiefkörper keine Nullteiler besitzt und α mit sich selbst kommutiert). Weiter gilt

$$K = \mathrm{End}_R(V) \subseteq \mathrm{End}_k(V)$$

(wegen $k \subseteq R$ ist jede R-lineare Abbildung auch k-linear). Deshalb ist K als k-linearer Unterraum von $\mathrm{End}_k(V)$ von endlicher Dimension über k. Dasselbe gilt auch für $k[\alpha]$, d.h $k[\alpha]$ ist eine endliche Körpererweiterung. Weil k algebraisch abgeschlossen ist, folgt $k[\alpha] = k$, also $\alpha\in k$. Wir haben gezeigt $K = k$.

2. Schritt. Beweis der Behauptung: $R = \mathrm{End}_k(V)$.

Sei $A \in \mathrm{End}_k(V)$. Wir haben zu zeigen $A \in R$. Nach dem ersten Schritt gilt $k = K$, d.h. es ist auch

$$A \in \mathrm{End}_K(V).$$

Sei

$$v_1, \dots , v_n \in V$$

eine Basis von V über k. Nach dem Dichtesatz 3.3.2 gibt es ein $\alpha \in R \subseteq End_k(V)$ mit

$$A(v_i) = \alpha \bullet v_i \text{ für } i = 1,...,n.$$

Da die Operation der k-linearen Abbildungen A, α: $V \longrightarrow V$ auf V durch deren Werte in den Elementen einer Basis vollständig festgelegt ist, gilt

$$A = \alpha \in R.$$

QED.

3.3.4 Die Operation multiplikativer Monoide $G \subseteq GL(V)$

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und

$$G \subseteq GL(V)$$

ein multiplikatives Teilmonoid[21] der allgemeinen linearen Gruppe von V. Ein G-invarianter Unterraum von V ist ein k-linearer Unterraum $W \subseteq V$ mit

$$\sigma(W) \subseteq W \text{ für jedes } \sigma \in G.$$

Der Vektorraum V heißt G-einfach, wenn es auch 0 und V selbst keinen G-invarianten Unterraum von V gibt.
Sei

$$R := k[G]$$

die k-Teilalgebra von $End_k(V)$, welche von G erzeugt wird.

Bemerkungen

(i) Weil G ein Monoid ist (d.h. $g', g'' \in G \Rightarrow g' \bullet g'' \in G$), besteht k[G] gerade aus den k-Linearkombinationen der Elemente von G,

$$k[G] = \{c_1 \bullet \sigma_1 + ... + c_r \bullet \sigma_r \mid c_i \in k, ,\sigma_i \in G, r = 1,2,3,...\}.$$

(ii) Ein k-linearer Unterraum von V ist genau dann G-invariant, wenn er k[G]-invariant ist.

(iii) Der Vektorraum V ist genau dann G-einfach, wenn er als k[G]-Modul einfach ist.

3.3.5 Folgerung 2

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und

$$G \subseteq \mathbf{GL}(V)$$

ein (multiplikatives) Teilmonoid. Ist V ein G-einfacher Vektorraum, so gilt

$$k[G] = End_k(V).$$

Beweis. Dies ist lediglich eine Umformulierte Variante des Satzes von Burnside (vgl. 3.3.3) unter Verwendung der in 3.3.4 eingeführten Terminologie.
QED.

---

[21] Ein Monoid ist eine Menge S zusammen mit einer assoziativen Abbildung $S \times S \longrightarrow S$, welche in S ein 1-Element besitzt. Die Bedingung an G bedeutet also, die Muliplikation in GL(V) führt nicht aus G heraus und die identische Abbildung liegt in G.

3.3.6 Vorbemerkungen

(i) Auch in den Fällen, in denen k nicht algebraisch abgeschlossen ist, kann man gewissen Ergebnisse formulieren. Seien allgemein A ein Ring und M ein einfacher A-Modul. Wie wir gesehen haben ist dann

$$\mathrm{End}_R(M)$$

ein Schiefkörper, den wir mit D bezeichnen werden, und M ein Vektorraum über D.

(ii) Seien R ein Ring und M ein beliebiger R-Modul. Wir sagen dann, M ist ein <u>treuer Modul</u>, wenn der Annullator des Moduls trivial ist

$$\mathrm{Ann}_A(M) := \{a\in A \mid a\bullet M = 0\} \text{ ist gleich } \{0\}.$$

(iii) In den Anwendungen wird M ein Vektorraum über einem Körper k sein, und wir werden von einem Ring-Homomorphismus

$$R \longrightarrow \mathrm{End}_k(M)$$

Gebrauch machen. Durch diesen Ring-Homomorphismus wird M zu einem R-Modul, der genau dann treu ist, wenn dieser Homomorphismus injektiv ist.

3.3.7 Folgerung 3: Satz von Wedderburn

Seien R ein Ring und M ein einfacher treuer R-Modul. Wir nehmen an, M ist endlich-dimensional als Vektorraum über dem Schiefkörper (vgl. das Lemma von Schur 3.1.5)

$$D := \mathrm{End}_R(M).$$

Dann gilt $R = \mathrm{End}_D(M)$.

Beweis. Sei $\{v_1, \ldots , v_n\}$ eine Vektorraum-Basis von M über D. Für ein gegebenes Element $A \in \mathrm{End}_D(M)$ gibt es dann nach 3.3.2 (Satz 1) ein Element $\alpha\in R$ mit

$$A(v_i) = \alpha\bullet v_i \text{ für } i = 1, \ldots , n.$$

Als D-lineare Endomorphismen von M, welche dieselben Werte in den Elementen einer D-Vektorraum-Basis haben, sind A und α damit gleich.Díe Abbildung[22]

$$R \longrightarrow \mathrm{End}_D(M),\ a \mapsto f_a, \text{ mit } f_a(x) = a\bullet x,$$

ist surjektiv. Sie ist injektiv, weil M ein treuer R-Modul ist.,
QED.

3.4 Halbeinfache Ringe

3.4.1 Definitionen

Ein Ring R heißt <u>halbeinfach</u>, wenn R als linker Modul über sich selbst halbeinfach ist und $1 \neq 0$ ist.
Ein linkes Ideal von des Rings R heißt <u>einfach</u>, wenn es als linker R-Modul einfach ist.
Zwei linke Ideale von R heißen <u>isomorph</u>, wenn sie als linke R-Moduln isomorph sind.
Sei R ein halbeinfacher Ring. Eine Familie

---

[22] Für $a \in R$, $\phi\in D = \mathrm{End}_R(M)$ und $x \in M$ ist

$$f_a(\phi\bullet x) = a\bullet\phi(x) = \phi(a\bullet x) \qquad (\phi \text{ ist R-linear})$$
$$= \phi\bullet f_a(x).$$

Damit ist f_a eine D-lineare Abbildung, d.h. die Abbildung $a \mapsto f_a$ ist wohldefiniert. Es ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1: für $a, b \in R$ und $x \in M$ gilt

$$f_a(f_b(x)) = a\bullet b\bullet x = f_{a\bullet b}(x)$$

$$\{\ell_i\}_{i\in I}$$

vonn linken Idealen von R heißt <u>Repräsentantensystem für die Isomorphie-Klassen einfacher linker Ideale</u> von R, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. Jedes ℓ_i ist als linker R-Modul einfach.
2. Keine zwei ℓ_i sind als linke R-Moduln isomorph.
3. Jedes einfache linke Ideal von R ist als R-Modul isomorph zu einem ℓ_i.

Ein Ring R heißt <u>einfach</u>, wenn er halbeinfach ist und je zwei einfache Linksideale von R isomorph sind.

Bemerkung

Seien R ein halbeinfacher Ring und $\{\ell_i\}_{i\in I}$ eine Familie von einfachen Linksidealen mit

$$R = \sum_{i\in I} \ell_i .$$

Dann ist jeder einfache R-Modul isomorph zu einem der ℓ_i. Ist R insbesondere einfach, so gibt es bis auf Isomorphie nur einen einfachen R-Modul.

Beweis.Seien M ein einfacher R-Modul und $x \in M - \{0\}$. Dann ist die R-lineare Abbildung

$$\varphi: R \longrightarrow M, r \mapsto r\cdot x,$$

nicht identisch Null. Weil M einfach ist, ist φ surjektiv. Nicht jedes der einfachen Linksideale ℓ_i liegt im Kern von φ. Sie ℓ_i eines dieser Ideale, die nicht im Kern von φ liegen. Dann ist die Einschränkung von φ auf ℓ_i,

$$\varphi|_{\ell_i} : \ell_i \longrightarrow M$$

nicht identisch 0. Weil ℓ_i und M einfach sind, ist φ ein Isomorphismus. Deshalb gilt

$$M \cong \ell_i.$$

QED.

3.4.2 Proposition 1: Moduln über halbeinfachen Ringen

Sei R ein halbeinfacher Ring. Dann ist jeder R-Modul halbeinfach.

Beweis. Jeder R-Modul ist Faktor-Modul eines freien R-Moduls. Nach 3.2.3 reicht es zu zeigen, daß freie R-Moduln halbeinfach sind. Nach 3.2.2 ist das aber der Fall.

QED.

3.4.3 Lemma: Produkte von einfachen Idealen und Moduln

Seien R ein halbeinfacher Ring, ℓ ein einfaches linkes Ideal von R und M ein einfacher R-Modul. Dann gilt

$$\ell\cdot M = 0,$$

falls ℓ und M als R-Moduln nicht isomorph sind.

Beweis. Das Produkt $\ell\cdot M$ ist ein Teilmodul von M, also gleich 0 oder gleich M. Angenommen, es gilt

$$\ell\cdot M = M.$$

Dann gibt es ein Element $m \in M$ mit

$$\ell\cdot m \ne 0.$$

Weil $\ell\cdot m$ ein Teilmodul von M ist, gilt

$$\ell\cdot m = M.$$

Die Abbildung

$$\ell \longrightarrow M,\ x \mapsto x\cdot m,$$

ist eine surjektive R-lineare Abbildung. Weil ℓ ein einfaches Ideal von R ist, muß sein Kern trivial sein. Die Abbildung

$$\ell \xrightarrow{\cong} M,\ x \mapsto x\cdot m,$$

ist somit ein Isomorphismus.
QED.

3.4.4 Satz 2: Die Struktur der halbeinfachen Ringe

Sei R ein halbeinfacher Ring. Ein Repräsentantensystem für die Isomorphie-Klassen einfacher linker Ideale für den Ring R besteht aus nur endliche vielen Linksidealen, sagen wir

$$\ell_1, \dots , \ell_s$$

Für i = 1,...,s sei

$$R_i = \sum_{\ell\cong\ell_i} \ell$$

die Summe aller zu ℓ_i isomorphen Ideale. Dann ist R_i ein zweiseitiges Ideal von R und gleichzeitig ein Ring, dessen Operationen gerade die Einschränkungen der entsprechenden Operationen von R auf R_i sind. Der Ring R ist isomorph zum direkten Produkt der R_i ,

$$\prod_{i=1}^{s} R_i \xrightarrow{\cong} R\ ,\ (x_1,\dots,x_s) \mapsto x_1+\dots + x_s.$$[23]

Jedes R_i ist ein einfacher Ring. Ist e_i das Einselement von R_i, so ist das Einselement von R gerade die Summe der e_i ,

$$1 = e_1+\dots + e_s,$$

und es gilt

$$R_i = R\cdot e_i = e_i\cdot R$$

und

$$e_i\cdot e_j = \begin{cases} e_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Beweis. 1. Schritt. Darstellung von R als Summe der R_i.
Sei

$$\{\ell_i\}_{i\in I}$$

ein Repräsentantensystem für die Isomorphie-Klassen einfacher linker Ideale für den halbeinfachen Ring R. Wie oben angegeben sei

[23] Die Abbildung ist ein Isomorphismus von Ringen mit 1, wobei die Operationen links koordinatenweise definiert sind.

$$R_i := \sum_{\ell \cong \ell_i} \ell$$

für jedes $i \in I$ die Summe aller zu ℓ_i isomorphen einfachen Ideale von R. Aus Lemma 3.4.3 folgt

$$R_i \bullet R_j = 0 \text{ für } i \neq j. \qquad (1)$$

Diese Tatsache werden wir im folgenden ständig verwenden.
Als halbeinfacher Ring ist R die Summe seiner einfachern linken Ideale ist, d.h. es gilt

$$R = \sum_{i \in I} R_i \;. \qquad (2)$$

dabei ist jedes R_i ein Linksideal von R.

2. <u>Schritt</u>. Jedes R_i ist ein zweiseitiges Ideal.

Als Summe von linken Idealen ist R_i ein Linksideal. Weiter gilt

$$\begin{aligned} R_j &\subseteq R_j \bullet R && \text{(wegen } 1 \in R\text{)} \\ &\subseteq R_j \bullet R_j && \text{(nach Lemma 3.4.3)} \\ &\subseteq R_j && \text{(weil } R_j \text{ linkes Ideal ist)} \end{aligned}$$

Insbesondere ist R_j auch ein rechtes Ideal.

3. <u>Schritt</u>. Die Index-Menge I ist endlich, sagen wir $I = \{1,...,s\}$. Die Zerlegung des R-Moduls R in eine Summe der R_i,

$$R = \sum_{i=1}^{s} R_i = \bigoplus_{i=1}^{s} R_i \;,$$

ist direkt. Für jedes i ist $R_i = R \bullet e_i$

Wegen (2) und $1 \in R$ gilt

$$1 = \sum_{i \in I} e_i \quad \text{mit } e_i \in R_i.$$

Diese Summe ist endlich, d.h. fast alle e_i sind gleich Null. Wir können o.B.d.A. annehmen,

$$e_1,..., e_s \text{ sind ungleich 0, alle anderen } e_i \text{ sind 0,}$$

und

$$1 = e_1 +...+ e_s. \qquad (3)$$

Sei $x \in R$. Wir schreiben x in der Gestalt

$$x = \sum_{i \in I} x_i \quad \text{mit } x_i \in R_i.$$

Dann gilt

$$e_j x = e_j x_j$$

(wegen $e_j x_i \in R_j \bullet R_i = 0$ nach (i)) und

$$x_j = 1\cdot x_j = e_1\cdot x_j + \ldots + e_s\cdot x_j = e_j\cdot x_j = e_j\cdot x \qquad (4)$$

Insbesondere ist x_j durch x und e_j eindeutigt bestimmt. Außerdem ist

$$\begin{aligned} x = 1\cdot x &= e_1\cdot x + \ldots + e_s\cdot x \\ &= e_1\cdot x_1 + \ldots + e_s\cdot x_s \qquad (5) \\ &= x_1 + \ldots + x_s. \end{aligned}$$

Da dies für jedes $x \in R$ gilt, folgt $I = \{1,\ldots,s\}$, d.h. I ist endlich. Weil die Summanden x_i der Zerlegung eines beliebigen Elements x in eine Summe

$$x = x_1 + \ldots + x_s \text{ mit } x_i \in R_i$$

eindeutig bestimmt sind, ist die Summe

$$R = \sum_{i=1}^{s} R_i = \bigoplus_{i=1}^{s} R_i$$

direkt. Wegen (1) gilt

$$R\cdot e_i = R_i\cdot e_i \subseteq R_i .$$

Die Inklusion rechts besteht dabei, weil R_i ein zweisetiges Ideal ist. Wegen (5) gilt

$$R = \sum_{i=1}^{s} R\cdot e_i \subseteq \sum_{i=1}^{s} R_i = R.$$

Es gilt also das Gleichheitszeichen. Weil die Zerlegung von R in eine Summe der R_i direkt ist, folgt

$$R\cdot e_i = R_i \text{ für jedes i.}$$

Dieselbe Rechnung mit vertauscher Reihenfolge der Faktoren zeigt

$$e_i\cdot R = R_i \text{ für jedes i.}$$

4. <u>Schritt</u>. R ist gerade das direkte Produkt der R_i. Jedes R_i ist ein Ring mit 1.
Wegen (1) gilt

$$e_i\cdot e_j = 0 \text{ für } i \neq j. \qquad (6)$$

Wegen

$$\begin{aligned} e_1 + \ldots + e_s &= 1 \\ &= 1\cdot 1 \\ &= (e_1 + \ldots + e_s)\cdot(e_1 + \ldots + e_s) \\ &= e_1^2 + \ldots + e_s^2 \qquad \text{(nach (6))} \end{aligned}$$

und der Direktheit der Summenzerlegung (2) folgt

$$e_i^2 = e_i$$

Für je zwei Elemente von R, sagen wir

$$x = x_1 + \ldots + x_s \text{ und } y = y_1 + \ldots + y_s \text{ mit } x_i, y_i \in R_i$$

gilt

$$\begin{aligned} x\cdot y &= (x_1 + \ldots + x_s)\cdot(y_1 + \ldots + y_s) \\ &= x_1\cdot y_1 + \ldots + x_s\cdot y_s \qquad \text{(wegen (1)} \end{aligned}$$

d.h. Addition und Mulitplikation werden in $\sum_{i=1}^{s} R_i = \bigoplus_{i=1}^{s} R_i$ koordinatenweise ausgeführt.

R ist das direkte Produkt der R_i. Für y = 1 erhalten wir aus $1\bullet x = x = x\bullet 1$ für die j-ten Koordinaten

$$e_j\bullet x_j = x_j = x_j\bullet e_j ,$$

d.h. e_j spielt die Rolle des Einselements in R_j und R_j ist ein Ring mit 1.

5. <u>Schritt</u>. R_i ist einfach.

Nach Definition ist R_i Summe einfacher Linksideale, die alle isomorph zu ℓ_i. Deshalb ist jeder einfache R_i-Modul isomorph zu ℓ_i l. die Bemerkung von 3.4.1 und ihr Beweis). Als ist R_i einfach.

3.4.5 Satz 3: die Struktur der Moduln halbeinfacher Ringe

Sei R ein halbeinfacher Ring und M $\neq$ 0 ein R-Modul. Dann gilt mit den Bezeichnungen von 3.4.4 (Satz 2)

$$M = \bigoplus_{i=1}^{s} R_i\bullet M = \bigoplus_{i=1}^{s} e_i\bullet M$$

Der R-Teilmodul $R_i\bullet M = e_i M$ von M ist dabei gerade die Summe aller einfachen R-Teilmoduln von M, welche isomorph sind zu ℓ_i.

Beweis. Sei M_i die Summe aller einfachen Teilmoduln von M, welche zu ℓ_i isomorph sind. Ist N $\subseteq$ M ein einfacher Teilmodul von M, so gilt

$$N = R\bullet N = R_i\bullet N \tag{1}$$

für ein i $\in$ I. Das erste Gleichheitszeichen gilt wegen 1 $\in$ R, das zweite wegen

$$R = \sum_{j=1}^{s} R_j$$

zusammen mit Lemma 3.4.3 und weil eines der Produkte $R_j\bullet N$ ungleich 0 sein muß.

Wäre N nicht isomorph zu ℓ_i so wäre $R_i\bullet N = 0$ nach Lemma 3.4.3. Mit (1) ist also

$$\ell_i \cong N.$$

Zusammen erhalten wir für jeden einfachen R-Modul

$$R_i\bullet N = \begin{cases} N & \text{für } N\cong\ell_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weil M als halbeinfacher R-Modul die Summe seiner einfachen Moduln ist, folgt

$$R_i\bullet M = M_i.$$

und

$$M = R\bullet M = (\sum_{j=1}^{s} R_j)\bullet M = \sum_{j=1}^{s} R_j\bullet M$$

Wegen $R_j = R\bullet e_j = e_j\bullet R$ ist

$$R_j\bullet M = e_j\bullet R\bullet M = e_j\bullet M.$$

Zusammen ist also

$$M = \sum_{i=1}^{s} R_i \bullet M = \sum_{i=1}^{s} e_i \bullet M$$

Wegen

$$e_i \bullet e_j = \begin{cases} e_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind die Summen direkt.

QED.

3.5 Einfache Ringe

3.5.1 Endomorphismen von R sind Linkstranslationen

Seien R ein Ring und $\psi \in \mathrm{End}_R(R)$ ein R-linearer Endomorphismus des R-Moduls R.

Dann gibt es ein Element $\alpha \in R$ mit

$$\psi(x) = x \bullet \alpha \text{ für jedes } x \in R.$$

Beweis. Für jedes $x \in R$ ist

$$\psi(x) = \psi(x \bullet 1) = x \bullet \psi(1).$$

Die Aussage ist richtig mit $\alpha := \psi(1)$.
QED.

3.5.2 Satz 4: Eigenschaften von einfachen Ringen

Sei R ein einfacher Ring. Dann gelten die folgenden Aussagen.
(i) R ist eine endliche direkte Summe von einfachen Linksidealen.
(ii) R besitzt außer 0 und R keine zweiseitigen Ideale.
(iii) Sind ℓ' und ℓ'' zwei einfache Linksideale von R, so gibt es ein $\alpha \in R$ mit

$$\ell'' = \ell' \bullet \alpha.$$

(iv) Für jedes einfache Linksideal ℓ von R gilt

$$\ell \bullet R = R.$$

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Weil R nach Definition ein halbeinfacher Ring ist, ist R eine direkte Summe von einfachen Linksidealen, sagen wir

$$R = \bigoplus_{j \in J} \ell_j.$$

Wir können dann das Einselement als endliche Summe von Elementen aus den ℓ_j schreiben, sagen wir

$$1 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \text{ mit } \beta_j \in \ell_j - \{0\}.$$

Es gilt

$$R = R \bullet 1 = \bigoplus_{j=1}^{m} R \bullet \beta_j = \bigoplus_{j=1}^{m} \ell_j.$$

Das rechte Gleichheitszeichen gilt wegen

$$R \bullet \beta_j = \ell_j ,$$

denn es gilt $\beta_j \in \ell_j$, ℓ_j ist ein einfaches Linksideal und $R\cdot\beta_j$ ein von 0 verschiedener Teilmodul.

Zu (iii). Seien ℓ' und ℓ'' zwei einfache Linksideal von R. Weil R ein einfacher Ring ist, sind sie isomorph als R-Modul. Sei

$$\sigma: \ell' \xrightarrow{\cong} \ell''$$

ein R-linearer Isomorphismus. Weil R als Modul über sich selbst halbeinfach ist, ist ℓ' ein direkter Summand von R, sagen wir

$$R = \ell' \oplus N'.$$

Sei

$$\pi: R \longrightarrow \ell', (x,y) \mapsto x,$$

die Projektion auf den ersten direkten Summanden. Dies ist eine R-lineare Surjektion. Die Zusammensetzung mit dem Isomorphismus σ,

$$\sigma\circ\pi: R \longrightarrow \ell'' (\subseteq R)$$

können wir als R-linearen Endomorphismus $R \longrightarrow R$ ansehen. Nach 3.5.1 gibt es ein $\alpha\in R$ mit

$$(\sigma\circ\pi)(x) = x\cdot\alpha \text{ für jedes } x \in R.$$

Nach Definition ist die Einschränkung von π auf ℓ' die identische Abbildung. Deshalb ist die Einschränkung von $\sigma\circ\pi$ auf ℓ' gerade der Isomorphismus σ. Insbesondere ist

$\sigma\circ\pi|_{\ell'} : \ell' \longrightarrow \ell''$, $x \mapsto (\sigma\circ\pi)(x) = x\cdot\alpha$,

nicht identisch Null. Als R-lineare Abbildung zwischen einfachen R-Moduln ist dies ein Isomorphismus, d.h. es ist

$$\ell'' = \ell'\cdot\alpha.$$

Zu (iv). Nach (iii) liegt in $\ell\cdot R$ jedes einfache Linksideal von R, also auch die Summe dieser einfachen Ringsideale, also auch R.

Zu (ii). Sei $I \subseteq R$ ein von 0 verschiedenes zweiseitiges Ideal. Dann gibt es ein einfaches Linksideal ℓ von R, welches ganz in I liegt

$$\ell \subseteq I.$$

(vgl.Bemerkung 3.2.2 (ii)). Weil I ein zweiseitigen Ideal ist, gilt nach (iv)

$$R = \ell\cdot R \subseteq I \subseteq R,$$

also I = R.

QED.

3.5.3 Folgerung: Treue der einfachen Moduln

Seien R ein einfacher Ring, ℓ ein einfaches Linksideal von R und M ein einfacher R-Modul. Dann gilt

$$\ell\cdot M = M$$

und M ist ein treuer R-Modul.

Beweis. Nach 3.5.2 gilt

$$\ell\cdot M = \ell\cdot(R\cdot M) = (\ell\cdot R)\cdot M = R\cdot M = M.$$

Sei $\alpha\in R$ ein Element mit

$$\alpha\cdot M = 0.$$

Dann gilt

$$0 = R\cdot\alpha\cdot M = R\cdot\alpha\cdot R\cdot M.$$

Nun ist R•α•R ein zweiseitigen Ideal von R, d.h. R•α•R ist gleich R oder gleich 0. Der erste Fall kann nicht eintreten, denn dann wäre 0 = R•M = M, im Widerspruch dazu, daß M ein einfacher R-Modul sein soll. Also gilt R•α•R = 0. Insbesondere ist

$$\alpha = 0.$$

Wir haben gezeigt, jeder einfache R-Modul ist treu.
QED.

3.5.4 Satz 5 (Satz von Rieffel)

Seien R ein Ring, der außer 0 und R keine zweiseitigen Ideale besizt,

$$\ell \subseteq R$$

ein von 0 verschiedenes linkes Ideal von R und

$$R' := \mathrm{End}_R(\ell),\ R'' := \mathrm{End}_{R'}(\ell).$$

Dann ist die natürlichen Abbildung

$$\lambda: R \longrightarrow R'',\ a \mapsto f_a,$$

mit $f_a(x) = ax$ ein Isomorphismus.

Beweis. Der Kern von λ ist ein echtes zweiseitiges Ideal von R, also 0. Deshalb ist λ injektiv.
Weil ℓ•R ein von 0 verschiedenes zweiseitiges Ideal ist, gilt ℓ•R = R, also

$$\lambda(\ell)\bullet\lambda(R) = \lambda(R). \tag{1}$$

Für beliebige $x,y \in \ell$ und $f \in R''$ gilt

$$f(xy) = f(x)\bullet y, \tag{2}$$

denn die Multiplikation von rechts mit $y \in \ell$ ist ein R-linearer Endomorphismus von ℓ, und f kommutiert als Element von R” mit solchen Endomorphismen. Die Identität (2) können wir auch in der folgenden Gestalt schreiben

$$f(\lambda(x)(y) = \lambda(f(x))(y) \text{ für alle } x, y \in \ell \text{ und alle } f \in R''$$

d.h.

$$f\bullet\lambda(x) = \lambda(f\bullet x) \text{ für } x \in \ell \text{ und } f \in R''.$$

d.h. $R''\bullet\lambda(\ell) \subseteq \lambda(\ell)$. Damit ist $\lambda(\ell)$ ein linkes Ideal von R”. Damit gilt

$$\begin{aligned} R'' &= R''\bullet\lambda(R) && \text{(wegen } 1 \in R\text{)} \\ &= R''\bullet\lambda(\ell)\bullet\lambda(R) && \text{(wegen (1))} \\ &= \lambda(\ell)\bullet\lambda(R) && \text{(weil } \lambda(\ell) \text{ ein Linksideal ist)} \\ &= \lambda(R) && \text{(wegen (1)).} \end{aligned}$$

Damit ist auch die Surjektivität von λ bewiesen.
QED.

Bemerkungen

(i) Ist der Ring R in 3.5.4 halbeinfach, so ist für R die Zahl der einfachen direkten Faktoren R_i gleich 1 (vgl. 3.4.4 Satz 2), d.h. R ist ein einfacher Ring.

(ii) Ist außerdem auch ℓ ein einfaches Linksideal, so ist R’ ein Schiefkörper und R bekommt die Gestalt eines Endomorphismen-Rings eines endlich-dimensionalen Vektorraums über diesem Körper. Der nachfolgende Satz ist eine Art Umkehrung dieser Aussage.

3.5.5 Satz 6: Matrizen-Algebren sind einfach

Seien D ein Schiefkörper, V eine endlich-dimensionaler D-Vektorraum und

$$R = \mathrm{End}_D(V).$$

Dann ist R ein einfacher Ring und V ist ein einfacher R-Modul. Außerdem gilt
$$D = \mathrm{End}_R(V).$$

Beweis. 1. Schritt. V ist ein treuer und einfacher R-Modul.

Sei $v \in V - \{0\}$. Der Vektor v ist ein Teil einer D-Vektorraum-Basis von V.

Insbesondere gibt es für jedes $w \in V$ eine D-lineare Abbildung
$$\alpha \in R = \mathrm{End}_D(V)$$
mit $\alpha(v) = w$. Damit enthält V keinen R-invarianten Unterraum außer 0 und V selbst. Mit anderen Worten, V ist als R-Modul einfach.

Ist $\alpha \in R$ ein Element aus dem Annullator von V in R, so gilt $\alpha(v) = 0$ für jedes $v \in V$,

d.h. α ist die 0-Abbildung, d.h. das 0-Element von R. Der R-Modul V ist somit treu.

2. Schritt. R ist ein einfacher Ring.

Sei
$$v_1, ..., v_m \in V$$
eine D-Vektorraum-Basis von V. Dann ist die Abbildung
$$R \longrightarrow V^{(m)}, \alpha \mapsto (\alpha(v_1), ..., \alpha(v_m)),$$
von R in die m-fache direkte Summe von V ist injektiv und R-linear. Für jedes
$$(w_1, ..., w_m) \in V^{(m)}$$
gibt es ein $\alpha \in R$ mit $\alpha(v_i) = w_i$ für alle i. Die Abbildung ist ein R-linearer Isomorphismus. Als R-Modul über sich selbst ist R eine direkte Summe von Exemplaren des einfachen R-Moduls V. Damit ist R halbeinfach, und da bis auf Isomorphie nur ein einfacher R-Modul (nämlich V) in der direkten Summe vorkommt ist R ein einfacher Ring.

3. Schritt. $D = \mathrm{End}_R(V)$.

Der Vektorraum V ist als D-Modul halbeinfach (weil V direkte Summe eindimensionaler Unterräume ist und 1-dimensionale D-Vektorräume als D-Moduln einfach sind). Wir können deshalb den Dichtesatz 3.3.2 anwenden (mit R und D vertauscht): für
$$\varphi \in \mathrm{End}_R(V) \text{ und } v \in V-\{0\}$$
gibt es ein $a \in D$ mit $\varphi(v) = a\cdot v$.

Sei $w \in V$. Es gibt dann ein $f \in R = \mathrm{End}_D(V)$ mit $f(v) = w$, also

$$\begin{aligned}
\varphi(w) &= \varphi(f(v)) \\
&= f(\varphi(v)) && (\varphi \text{ ist R-linear und } f \in R) \\
&= f(av) && (\text{nach Wahl von a}) \\
&= a\cdot f(v) && (f \in R = \mathrm{End}_D(V) \text{ ist D-linear und } a \in D) \\
&= a\cdot w && (\text{nach Wahl von f}).
\end{aligned}$$

Da dies für jedes $w \in V$ gilt, ist $\varphi = f_a$ gerade die Multiplikation mit a von links, d.h.

jedes vorgegebene φ aus $\mathrm{End}_R(V)$ liegt im Bild der natürlichen Abbildung
$$D \longrightarrow \mathrm{End}_R(V), a \mapsto f_a, \text{ mit } f_a(x) = ax.$$
Die natürliche Abbildung ist surjektiv. Sie ist injektiv weil sie nicht identisch 0 ist und D als Schiefkörper keine zweiseitigen Ideale außer 0 und D besitzt.

QED.

3.5.6 Satz 7: Die Zahl der Linksideale in einer Zerlegung von $Mat_m(k)$

Seien k ein Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum,

$$m := \dim_k V$$

und

$$R := End_k(V).$$

Dann ist R ein k-Vektorraum der Dimension

$$\dim_k R = m^2.$$

Außerdem ist m die Zahl der einfachen Linksideale, die in einer Zerlegung von R in eine direkte Summe solcher Ideale auftritt.
Beweis. Der Raum der k-linearen Endomorphismen von V läßt sich mit dem Raum der n×n-Matrizen mit Einträgen aus k identifizieren, d.h. es gilt

$$\dim_k R = m^2.$$

Auf der anderen Seite ist R also R-Modul isomorph zu einer m-fachen direkten Summe $V^{(m)}$ von Exemplaren von V (vgl. 2.Schritt im Beweis von 3.5.5 Satz 6). Der verbleibende Teil der Behauptung ergibt sich aus der Eindeutigkeitsaussage von 3.1.6 Proposition 2.
QED.

3.5.7 Eine explizite Zerleung von $Mat_m(k)$ in Linksideale

In der Terminologie von 3.1 ist die Zahl m von 3.5.6 Satz 7 gerade die Länge des Rings R.
Wir können

$$R = End_k(V)$$

mit Hilfe einer Basis von V mit dem Matrizenring

$$Mat_m(k)$$

identifizieren. In diesem Fall können wir als einfache Linksideale ℓ_i (i = 1,...,m) die Ideale verwenden, deren Matrizen nur in der i-ten Spalte von 0 verschiedene Einträge besitzen.
Wir sehen unmittelbar, daß R die direkte Summe der m Spalten ist.

3.5.7 Das Zentrum eines vollen Matrizen-Rings

Kommutiert die Matrix $A \in Mat_m(k)$ mit allen anderen Matrizen von $Mat_m(k)$, so ist A eine Skalar-Matrix.
Beweis. Seien $V = k^n$ und $R = End_k(V)$. Dann können wir die Matrix A als R-linearen Endomorphismus von V betrachten. Nach 3.5.5 Satz 6 (mit D = k) liegt jeder solche Endomorphismus in k.
QED.
Bemerkung
Der Beweis dieser Aussage durch direktes Rechnen ist auch nicht schwer.

4 Partitionen und Stratifikationen topologischer Räume

Frei nach
Abschnitt 28. Partitions and stratifications, auf den Seiten 52 - 54
https://stacks.math.columbia.edu/download/topology.pdf
(download 20-12-02)

Stratifikationen können auf viele verschiedene Weisen definiert werden. Wir würden uns über Kommentare zur Wahl der Definitionen in diesem Abschnitt freuen.

4.1 Definition: Partitionen und deren Verfeinerungen

Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt lokal abgeschlossen, wenn es für jeden Punkt $z \in Z$ eine in X offene Umgebung U von z gibt mit $U \cap Z$ abgeschlossen in U.

Eine Partition von X ist eine Zerlegung

$$X = \vee_{i \in I} X_i$$

in paarweise disjunkte lokal abgeschlossene Teilmengen X_i. Die Mengen X_i heißen Teile der Partition. Eine Verfeinerung der Partition ist eine Partition

$$X = \vee_{j \in J} Y_j$$

von X, die jedes X_i eine Vereinigung gewisser Mengen Y_j ist.

Bemerkungen

(i) Seien X ein topologischer Raum und Z eine Teilmenge von X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.[24]
   1. Z ist lokal abgeschlossen in X.
   2. $Z = U \cap F$ mit U offen in X und F abgeschlossen in X.

---

[24] $2 \Rightarrow 1$. Trivial, denn $X = U \cap F$ ist abgeschlossen in U.

$1 \Rightarrow 2$. Weil Z lokal abgeschlosssen ist, gibt es für jeden Punkt $z \in Z$ eine offene Umgebung U_z von z in X mit

$$U_z \cap Z \text{ abgeschlossen in } U_z.$$

Wir setzen

$$U := \bigcup_{z \in Z} U_z.$$

Dies ist eine offene Teilmenge von X mit

$$Z \subseteq U.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$Z \text{ ist abgeschlossen in } U.$$

Sei

$$x \in U \text{ Berührungspunkt von } Z.$$

Wegen $x \in U$ gibt es ein $z \in Z$ mit

$$x \in U_z.$$

Weil sich jede offene Umgebung von x mit Z schneidet, gilt dies auch für jede offene Umgebung von x, welche ganz in U_z liegt. Für jede ganz in U_z liegende offene Umgebung V von x gilt also

$$V \cap Z \neq \emptyset,$$

also auch

$$V \cap (U_z \cap Z) \neq \emptyset$$

(wegen $V \subseteq U_z$). Mit anderen Worten x ist ein Berührungspunkt von $U_z \cap Z$ (betrachtet als Teilmenge von U_z). Nach Wahlt von U_z ist $U_z \cap Z$ abgeschlossen in U_z, d.h. es gilt $x \in U \cap Z$, also erst recht

$$x \in Z.$$

Wir haben gezeigt, jeder Punkt von U, welcher Z berührt, liegt in Z, d.h. Z ist abgeschlossen in U.

(ii) Jeder topologische Raum X besitzt eine Partition in dessen Zusammenhangskomponenten.

(iii) Hat X endlich vielen irreduzible Komponenten $Z_1, \dots, Z_r$ so hat X eine Partition mit den Teilen

$$X_I := \bigcap_{i\in I} Z_i ,$$

wobei der Index I alle Teilmengen von {1,..., r} durchläuft. Diese Partition ist eine Verfeinerung der Partition von X in Zusammenhangskomponenten.

4.2 Definiton: gute Stratifikationen

Sei X ein topologischer Raum. Eine gute Stratifikation von X ist eine Partition

$$X = \vee_{i\in I} X_i \qquad (1)$$

mit der Eigenschaft, daß für beliebige i, j ∈ I die folgende Implikation besteht.

$$X_i \cap \overline{X}_j \neq \emptyset \Rightarrow X_i \subseteq \overline{X}_j .$$

Bemerkungen

(i) Ist (1) eine gute Partition, so kann man auf I eine Halbordnung ≤ einführen mit

$$i \le j \Leftrightarrow X_i \subseteq \overline{X}_j$$

für beliebige i, j ∈ I. Es gilt dann

$$\overline{X}_j = \bigcup_{i\le j} X_i .$$

(ii) In der algebraischen Geometrie treten oft Partition $X = \vee_{i\in I} X_i$ mit halbgeordneten Index-Mengen I auf, für welche nur eine Inklusion

$$\overline{X}_j \subseteq \bigcup_{i\le j} X_i .$$

besteht. Das führt zu nachfolgenden Defintion 4.3.

Beweis der Identität von Bemerkung (i). Auf Grund der Definition der Halbordnung von I besteht die Inklusion

$$\bigcup_{i\le j} X_i \subseteq \overline{X}_j .$$

Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$x \in \overline{X}_j \subseteq X.$$

Weil X von den Mengen X_i überdeck wird, gibt es ein i ∈ I mit

$$x \in X_i \cap \overline{X}_j .$$

Weil (1) eine gute Stratifikation sein soll, folgt $X_i \subseteq \overline{X}_j$. Auf Grund der Definition der Halbordnung auf I ist dann i ≤ j, also

$$x \in X_i \cap \overline{X}_j = X_i \subseteq \bigcup_{\alpha\le j} X_\alpha .$$

Damit besteht auch die umgekehrte Inklusion.
QED.

4.3 Definition: Stratifikationen

Sei X ein topologischer Raum. Eine Stratifikation von X ist eine Partition

$$X = \vee_{i\in I} X_i$$

von X mit einer halbgeordneten Index-Menge I, wobei für jedes j ∈I die Inklusion

$$\overline{X}_j \subseteq \bigcup_{i\leq j} X_i.$$

besteht.

Bemerkungen

Oftmal betrachten wir Stratifikation, für welche zusätzliche Bedingungen erfüllt sind. Zum Beispiel sind Stratifikationen besonders interessant, wenn sie lokal endlich sind. Das bedeutet, jeder Punkt besitzt eine Umgebung, welche sich nur mit endlich vielen Teilen der Stratifikation schneidet. Wir führen deshalb eine formale Definition dieses Begriffs ein.

4.4 Definition: Lokal endliche Familien von Teilmengen

Sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $\{E_i\}_{i\in I}$ von Teilmengen $E_i \subseteq X$ heißt lokal endlich, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt, für welche die Menge

$$\{i\in I \mid E_i \cap U \neq \varnothing\}$$

endlich ist.

4.5 Bemerkung: eine Charakterisierung der lokal endlichen Stratifiktionen

(i) Seien X ein topologischer Raum und

$$X = \vee_{i\in I} X_i$$

eine lokal endliche Stratifiktion von X. Für jedes $i \in I$ setzen wir

$$Z_i := \bigcup_{j\leq i} X_j.$$

Dann sind die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. $X = \bigcup_{i\in I} Z_i$.
2. Z_i ist abgeschlossen in X für jedes $i \in I$.
3. $Z_i \cap Z_j = \bigcup_{k\leq i \text{ und } k\leq j} Z_k$

Die Familie $\{Z_i\}_{i\in I}$ ist lokal endlich, falls es für jedes $i\in I$ nur endlich viele $j\in I$ gibt mit $i \leq j$.

(ii) Für jede halbgeordnete Menge I und jede lokal endliche Familie $\{Z_i\}_{i\in I}$ von Teilmengen von X, welchen den Bedingungen 1- 3 von Bemerkung (i) genügt, ist eine lokal endliche Stratifikation von X mit den Teilen

$$X_i := Z_i - \bigcup_{j<i} Z_j$$

definiert.

Beweis. Zu (i). Bedingung 3 ist erfüllt. Nach Definition der Z_i gilt

$$\begin{aligned} Z_i \cap Z_j &= (\bigcup_{\alpha\leq i} X_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta\leq j} X_\beta) \\ &= \bigcap_{\alpha\leq i \;\&\; \beta\leq j} (X_\alpha \cap X_\beta) \end{aligned}$$

Weil die X_i paarweise disjunkt sind, folgt

$$Z_i \cap Z_j = \bigcap_{\alpha\leq i \;\&\; \alpha\leq j} X_\alpha,$$

d.h. es bestehen die Identitäten von Bedingung 3.

<u>Bedingung 2 ist erfüllt</u>. Sei x ein Berührungspunkt von Z_i. Weil die Stratifikation lokal endlich ist, gibt es eine Umgebung U von x, die sich mit nur endlich vielen X_j schneidet, sagen wir nur mit $X_{i_1},...,X_{i_r}$. Falls x kein Berührungspunkt eines der X_{i_ν} ist, können wir U so verkleinern, daß es sich mit diesem X_{i_ν} nicht mehr schneidet. Wir können also annehmen,

$$x \text{ ist Berührungspunkt von } X_{i_\nu} \text{ für } \nu = 1,...,r.$$

Weil x Berührungspunkt von Z_i ist, schneidet sich U mit Z_i, also mit einem X_j, für welches $j \le i$ ist. Da sich U nur mit $X_{i_1},...,X_{i_r}$ schneidet, muß X_j mit einer der Mengen X_{i_ν} übereinstimmen, d.h.

$$\text{es gibt ein } \nu \text{ mit } i_\nu \le i.$$

Für dieses i_ν gilt

$$\begin{array}{lll} x & \in \bar{X}_{i_\nu} & \text{(x ist Berührungpunkt von } X_{i_\nu}) \\ & \subseteq \bigcup_{j\le i_\nu} X_j & \text{(die } X_\alpha \text{ bilden eine Stratifikation von X)} \\ & \subseteq \bigcup_{j\le i} X_j & \text{(wegen } i_\nu \le i) \\ & = Z_i & \text{(nach Definition von } Z_i) \end{array}$$

Wir haben gezeigt, jeder Berührungspunkt von Z_i liegt in Z_i, d.h. Z_i ist abgeschlossen.

<u>Bedingung 1 ist erfüllt</u>.

Es gilt

$$\begin{array}{lll} X & \supseteq \bigcup_{i\in I} Z_i & \\ & \supseteq \bigcup_{i\in I} X_i & \text{(nach Definition von } Z_i) \\ & = X & \text{(die } X_i \text{ sind die Teile einer Stratifikation von X).} \end{array}$$

Damit gilt überall das Gleichheitszeichen, d.h. Bedingugn 1 ist erfüllt.

<u>Es gilt auch der zweite Teil der Aussage von</u> (i). Wir nehmen an, für jedes $i\in I$ gibt es nur endlich viele $j\in I$ gibt mit $i \le j$, und haben zu zeigen, daß die Familie $\{Z_i\}_{i\in I}$ lokal endlich ist. Sei ein Punkt $x \in X$ vorgegeben. Wei die Familie $\{X_i\}_{i\in I}$ lokal endlich ist, gibt es eine Umgebung U von x, die sich nur mit endlich vielen X_i schneidet, sagen wir

$$\{i \in I \mid U \cap X_i \ne \emptyset \} = \{i_1,...,i_r\}.$$

Sei jetzt $i \in I$ derart, daß

$$U \cap Z_i \ne \emptyset$$

gilt. Nach Definition von Z_i schneidet sich dann U mit einem X_j, für welches $j \le i$ gilt. Dann ist aber j eines der i_ν, d.h. es gilt

$$i_\nu \leq i \text{ für ein } \nu \in \{1,...,r\}.$$

Nach Voraussetzung gibt es aber nur endlich viele $i \in I$, für welche letztere Bedingung erfüllt ist. Deshalb ist die Familie $\{Z_i\}_{i\in I}$ lokal endlich.

Zu (ii). Auf Grund von Bedinung 1 gibt es für jedes $x \in X$ ein $i \in I$ mit $x \in Z_i$. Unter allen Indizes $i \in I$ mit $x \in Z_i$ gibt es einen minimalen, denn andernfalls wäre die Familie $\{Z_i\}_{i\in I}$ nicht lokal endlich. Ist $i \in I$ ein solcher minimaler Index, so ist

$$x \in Z_i - \bigcup_{j<i} Z_j = X_i.$$

Weil es für jedes $x \in X$ einen solchen Index i gibt, gilt

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i. \tag{1}$$

Weil die Z_i auf Grund von Bedingung 2 abgeschlossen sind, sind die X_i lokal abgeschlossen (nach Definition). Für je zwei verschiedene Indizes $i, j \in I$ gilt

$$\begin{aligned} X_i \cap X_j &= (Z_i - \bigcup_{\alpha<i} Z_\alpha) \cap (Z_j - \bigcup_{\beta<j} Z_\beta) \qquad \text{(nach Definition der } X_\gamma\text{)} \\ &= Z_i \cap Z_j - (\bigcup_{\alpha<i} Z_\alpha \cup \bigcup_{\beta<j} Z_\beta) \\ &= \bigcup_{\gamma\leq i \& \gamma\leq j} Z_\gamma - (\bigcup_{\alpha<i} Z_\alpha \cup \bigcup_{\beta<j} Z_\beta) \text{ (nach Bedingung 3)} \end{aligned}$$

Kein Z_γ mit $\gamma < i$ oder $\gamma < j$ hat mit dieser Differenz Punkte gemeinsam. Deshalb gilt

$$X_i \cap X_j \quad \subseteq \bigcup_{\gamma=i\&\gamma=j} Z_\gamma.$$

Weil i und j verschieden sein sollen, ist die Vereinigung rechts leer, d.h. es gilt

$$X_i \cap X_j = \emptyset \text{ für i und j verschieden.}$$

Damit ist (1) eine Partition. Wir haben noch zu zeigen,

$$\overline{X}_i \subseteq \bigcup_{j\leq i} X_j\,, \tag{2}$$

denn dann definieren die X_i eine Stratifikation, welche lokal endlich ist wegen $X_i \subseteq Z_i$ und der lokalen Endlichkeit der Familie $\{Z_i\}_{i\in I}$.

Sei $x \in \overline{X}_i$. Falls x sogar in X_i, liegt x trivialerweise in der rechten Seite von (2). Wir können also annehmen,

$$x \in \overline{X}_i - X_i$$

Nach Definition von X_i gilt $X_i \subseteq Z_i$, und weil Z_i abgeschlossen ist,

$$\overline{X}_i \subseteq Z_i \subseteq X_i \cup (\bigcup_{j<i} Z_j)$$

also

$$\overline{X}_i - X_i \subseteq \bigcup_{j<i} Z_j.$$

Deshalb gibt es in $j < i$ mit $x \in Z_j$. Weil die Familie $\{Z_i\}_{i\in I}$ lokal endlich ist, gibt es unter allen $j \in I$ mit $j < i$ und $x \in Z_j$ ein minimales. Für ein solches minimales j gilt

$$x \in Z_j - \bigcup_{\alpha<j} Z_\alpha = X_j$$

Wegen j < i liegt damit x in der Vereinigung der rechten Seite von (2). Damit ist (2) bewiesen, und (1) ist wie behauptet eine lokal endliche Stratifikation.

QED.

4.6 Verfeinerung endlicher Partitionen zu Stratifikationen

Seien X ein topologischer Raum und $X = \vee_{i\in I} X_i$ eine endliche Partition von X. Dann gibt es eine endliche Stratifikation von X, welche diese Partition verfeinert.

Beweis. Wir setzen

$$T_i := \overline{X}_i \text{ und } \Delta_i := \overline{X}_i - X_i.$$

Sei S die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mengen der Gestalt T_i und Δ_i. Dann ist

$$S = \{Z_\alpha\}_{\alpha\in J}$$

eine endliche Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit

$$Z_\alpha \cap Z_\beta \in S \text{ für beliebige } \alpha,\beta\in J \tag{1}$$

Insbesondere sind alle T_i und alle Δ_i Elemente von S.

Wir führen auf der Index-Menge J wie folgt eine Halbordnung ein,

$$\alpha \le \beta \Leftrightarrow Z_\alpha \subseteq Z_\beta, \tag{2}$$

und setzen für jedes $\alpha\in J$,

$$Y_\alpha := Z_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta.$$

Zeigen wir, es gilt

$$X = \bigcup_{\alpha\in J} Y_\alpha \tag{3}$$

Die Inklusion "$\supseteq$" besteht trivialerweise. Wir haben zu zeigen, es gilt "$\subseteq$". Sei

$$x \in X.$$

Weil die X_i eine Partition von X bilden, liegt x in einem X_i. Da die $\overline{X}_i$ zur Familie der Z_α gehören, liegt x in einem Z_α. Unter allen $\alpha\in J$ mit $x \in Z_\alpha$ gibt es ein minimales (weil die Index-Menge J endlich ist). Ist α ein solcher minimaler Index, so gilt $x \in Y_\alpha$ (nach Definition von Y_α). Damit ist (3) bewiesen.

Zeigen wir, (3) ist eine Partition. Die Y_α sind lokal abgeschlossen, weil die Z_α abgeschlossen sind. Für je zwei verschiedene $\alpha', \alpha'' \in J$ gilt

$$Y_{\alpha'} \cap Y_{\alpha''} = (Z_{\alpha'} - \bigcup_{\beta<\alpha'} Z_\beta) \cap (Z_{\alpha''} - \bigcup_{\gamma<\alpha''} Z_\gamma)$$
$$= Z_{\alpha'} \cap Z_{\alpha''} - (\bigcup_{\beta<\alpha'} Z_\beta \cup \bigcup_{\gamma<\alpha''} Z_\gamma)$$

Wegen (1) ist der Durchschnitt

$$Z_\delta := Z_{\alpha'} \cap Z_{\alpha''}$$

ein Element von S und für den Index δ gilt, weil α' und α'' verschieden sind, zusammen mit (2):

$$\delta < \alpha' \text{ und } \delta < \alpha''.$$

Damit liegt aber Z_δ vollständig in der Menge, welche von $Z_{\alpha'} \cap Z_{\alpha''}$ abgezogen wird, d.h. es ist

$$Y_{\alpha'} \cap Y_{\alpha''} = \varnothing \text{ für } \alpha' \neq \alpha''.$$

Die Mengen Y_α sind paarweise disjunkt. Wir haben gezeigt, (3) ist eine Partition.

Zeigen wir als nächstes, daß die Partition (3) eine Stratifikation ist, d.h.

$$\overline{Y}_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\le\alpha} Y_\beta \tag{4}$$

Sei

$$x \in \overline{Y}_\alpha.$$

Nach Definition von Y_α und weil Z_α abgeschlossen ist, gilt

$$x \in Z_\alpha.$$

Unter allen $\beta \in I$ mit $\beta \le \alpha$ und $x \in Z_\beta$ gibt es ein minimales (weil die Index-Menge J endlich ist). Sei β ein solches minimales Element von J. Nach Definition von Y_β gilt dann auch

$$x \in Y_\beta.$$

Wegen $\beta \le \alpha$ liegt damit x auch in der rechten Seite von (4). Wir haben damit (4) bewiesen, und damit auch, daß (3) eine Stratifikation ist.

Zeigen wir als nächstes,

$$Z_\alpha = \bigcup_{\beta\le\alpha} Y_\beta \tag{5}$$

Für $\beta \le \alpha$ gilt

$$\begin{aligned} Y_\beta &\subseteq Z_\beta && \text{(nach Definition von } Y_\beta) \\ &\subseteq Z_\alpha && \text{(wegen } \beta \le \alpha \text{ und (2)).} \end{aligned}$$

Deshalb besteht anstelle von (5) zumindest die Inklusion "$\supseteq$". Wir haben zu zeigen, daß auch "$\subseteq$" gilt. Sei

$$x \in Z_\alpha.$$

Weil die Indexmenge J endlich ist, gibt es unter den $\beta \in I$ mit $\beta \le \alpha$ und $x \in Z_\beta$ ein minimales. Für dieses minimale β ist $x \in Y_\beta$ (nach Definition von Y_β). Wegen $\beta \le \alpha$ liegt damit der Punkt x in der Vereinigung auf der rechten Seie von (5).

Wir haben noch zu zeigen,

die Partition (3) verfeinert die gegebene Partition mit den Teilen X_i.

Dazu haben wir zu zeigen, jedes Y_α liegt vollständig in einem X_i. Nach Definition von Y_α und Z_α gilt

$$Y_\alpha \subseteq Z_\alpha = \overline{X}_{i_1} \cap ... \cap \overline{X}_{i_r} \cap (\overline{X}_{j_1} - X_{j_1}) \cap ... \cap (\overline{X}_{j_s} - X_{j_s})$$

Wir können dabei annehmen,

$$\{i_1,....,i_r\} = \{ i \in I \mid Z_\alpha \subseteq \overline{X}_i \} \tag{6}$$

und

$$\{j_1,...,j_s\} = \{ i \in I \mid Z_\alpha \subseteq \overline{X}_i - X_i \} \tag{7}$$

Sei

$$x \in Y_\alpha.$$

Weil die X_i eine Partition von X bilden, gibt es ein $i \in I$ mit

$$x \in X_i.$$

Wegen $x \notin \overline{X}_i - X_i$ ist i von allen j_ν verschieden,

$$i \notin \{j_1,...,j_s\}. \tag{8}$$

Außerdem liegt i in der Menge der i_ν,

$$i \in \{i_1,....,i_r\}, \tag{9}$$

denn andernfalls wäre $Z_\alpha \not\subseteq \overline{X}_i$ (nach (6)), also $Z_\alpha \cap \overline{X}_i$ eine Menge der Gestalt

$$Z_\beta = Z_\alpha \cap \overline{X}_i \text{ mit } \beta < \alpha$$

(wegen (1) und (2)). Wegen $x \in Z_\beta$ kann dann aber x nicht in Y_α liegen (nach Definition von Y_α). Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von x. Es gilt also (8) und (9). Wegen (9) gilt

$$Y_\alpha \subseteq Z_\alpha \subseteq \overline{X}_i \tag{10}$$

und wegen (8) erhalten wir

$$Z_\alpha \not\subseteq \overline{X}_i - X_i .$$

Wäre

$$Y_\alpha \subseteq \overline{X}_i - X_i$$

so würde gelten

$$Y_\alpha \subseteq Z_\alpha \cap (\overline{X}_i - X_i) = Z_\beta \text{ mit } \beta < \alpha,$$

im Widerspruch zur Definition von Y_α. Es folgt

$$Y_\alpha \not\subseteq \overline{X}_i - X_i . \tag{11}$$

Nach (5) ist $\overline{X}_i - X_i$ Vereinigung von gewissen Y_β, wobei Y_α unter diesen Y_β nicht vorkommt (wegen (11)). Nun sind aber die Y_γ paarweise disjunkt, denn sie sind die Teile einer Stratifikation. Dann gilt aber sogar

$$Y_\alpha \cap (\overline{X}_i - X_i) = \varnothing.$$

Zusammen mit (10) folgt $Y_\alpha \subseteq X_i$, wie behauptet.

QED.

4.7 Verfeinerung konstruktiver Vereinigungen

Sei X ein topologischer Raum, welcher Vereinigung von endlich vielen konstruktiven Mengen ist, sagen wir

$$X = T_1 \cup ... \cup T_n \text{ mit } T_i \text{ konstruktiv.}$$

Dann gibt es eine endliche Stratifikation

$$X = \vee_{i \in I} X_i$$

mit X_i konstruktiv derart, daß jedes T_j eine Vereinigung von Strata X_i ist.

Definitionen

Seien X ein topologischer Raum. Der topologische Raum X heißt <u>quasi-kompakt</u>, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Verfeinerung besitzt. Eine stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ heißt <u>quasi-kompakt</u>, wenn das vollständige Urbild $f^{-1}(V)$ jeder quasi-kompakten offenen Teilmenge $V \subseteq Y$ quasi-kompakt ist. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt <u>retrokompakt</u>, wenn die natürliche Einbettung $Z \hookrightarrow X$ quasi-kompakt ist. Eine Teilmenge E von X heißt <u>konstruktiv</u> in X, wenn sie eine endliche Vereinigung von Mengen der Gestalt

$$U \cap (X-V)$$

ist mit U und V offen und retrokompakt in X. Die Menge E heißt <u>lokal konstruktiv</u> in X, wenn es eine offene Überdeckung $X = \bigcup V_i$ gibt mit $E \cap V_i$ konstruktiv in V_i für jedes i.

Bemerkungen

(i) Endliche Vereinigungen von konstruktiven Teilmengen sind konstruktive Teilmengen.

(ii) Endliche Durchschnitte von konstruktiven Teilmengen sind konstruktive Teilmengen.

(iii) Das Komplement einer konstruktiven Teilmenge ist eine konstruktive Teilmenge.

Beweis der Bemerkungen.

<u>Zu (i)</u>. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Definition der konstruktiven Menge.

<u>Zu (ii)</u>. Es reicht zu zeigen, der Durchschniit von zwei konstruktiven Teilmengen ist Konstruktiv. Seien zwei konstruktive Teilmengen gegeben, sagen wir

$$X_i = (U_{i1} \cap (X-V_{i1})) \cup ... \cup (U_{in(i)} \cap (X-V_{in(i)})), \; i = 1,2,$$

mit U_{ij} und V_{ij} offen und retrokompakt in X für alle i und j. Es gilt

$$\begin{aligned} X_1 \cap X_2 &= \bigcup_{i=1}^{n(1)} \bigcup_{j=1}^{n(2)} (U_{i1} \cap (X-V_{i1}) \cap U_{j2} \cap (X-V_{j2})) \\ &= = \bigcup_{i=1}^{n(1)} \bigcup_{j=1}^{n(2)} (U_{i1} \cap U_{j2} \cap (X-(V_{i1} \cup V_{j2})) \end{aligned}$$

Es reicht zu zeigen, die Mengen

$$U_{i1} \cap U_{j2} \text{ und } V_{i1} \cup V_{j2}$$

sind retrokompakt und offen. Offen sind sie trivialerweise. Damit reicht es zu zeigen,

$$U \cap V \text{ und } U \cup V$$

sind retrokompakt für je zwei retrokompakte und offene Mengen U und V. Wir müssen also zeigen, für jede quasi-kompate offene Teilmenge W von X sind

$$U \cap V \cap W \text{ und } (U \cup V) \cap W$$

quasikompakt.

Weil U retrokompakt ist, ist $U\bigcap W$ offen und quasikompakt.. Weil V retrokompakt ist, ist damit auch

$$V \bigcap (U\bigcap W) = U\bigcap V\bigcap W$$

quasi-kompakt.

Weil U und V retrokompakt sind, sind $U\bigcap W$ und $V\bigcap W$ quasikompakt. Dann ist aber auch die Vereinigung

$$(U\bigcap W) \bigcup (V\bigcap W) = (U\bigcup V)\bigcap W$$

quasi-kompakt.

Zu (iii). Sei eine konstruktive Menge gegeben, sagen wir,

$$Y := (U_1 \bigcap (X\text{-}V_1)) \bigcup ... \bigcup (U_n \bigcap (X\text{-}V_n))$$

mit U_i und V_i retrokompakt und offen. Wir haben zu zeigen X-Y ist konstruktiv. Es gilt

$$\begin{aligned} X\text{-}Y &= X - ((U_1 \bigcap (X\text{-}V_1)) \bigcup ... \bigcup (U_n \bigcap (X\text{-}V_n))) \\ &= \bigcap_{i=1}^n X - ((U_i \bigcap (X\text{-}V_i)) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (X - U_i) \bigcup (X -(X\text{-}V_i)) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (X - U_i) \bigcup V_i. \end{aligned}$$

Weil die U_i und V_i retrokompakt und offen sind, ist X-Y konstruktiv.

QED.

Beweis des Satzes 4.7. Nach Definition sind konstruktive Teilmengen endliche Vereinigungen von Mengen der Gestalt´

$$U \bigcap (X\text{-}V)$$

mit U, V offen und retrocompakt in X. Wir können deshalb annehmen,

$$T_i = U_i\bigcap(X\text{-}V_i) \text{ für } i = 1,...,n$$

mit U_i, V_i offen und retrokompakt in X für jedes i. Sei

$$S$$

die endliche Menge der abgeschlossenen Mengen

$$(X\text{-}U_i), (X\text{-}V_i)$$

zusammen mit allen endlichen Durchschnitten dieser Mengen (welche ebenfalls abgeschlossen sind). Wir schreiben S in der Gestalt

$$S = \{Z_\alpha\}_{\alpha\in J}$$

mit einer endlichen Index-Menge. Dann gilt:

1. Z_α ist abgeschlossen für jedes $\alpha\in J$. (nach Definition von S)
2. Z_α ist konstruktiv für jedes $\alpha\in J$. (nach Bemerkung (ii))
3. $Z_{\alpha'}\bigcap Z_{\alpha''} \in S$ für beliebige $\alpha', \alpha'' \in J$. (nach Definition von S). (1)

Wir definieren auf der Index-Menge J eine Halbordnung ≤ durch

$$\alpha' \le \alpha'' \Leftrightarrow Z_{\alpha'} \subseteq Z_{\alpha''} \tag{2}$$

und setzen

$$Y_\alpha := Z_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta.$$

Wie im Beweis von 4.6 ergibt sich, daß die Y_α eine Stratifikation bilden:

Zeigen wir, es gilt

$$X = \bigcup_{\alpha\in J} Y_\alpha \tag{3}$$

Die Inklusion "$\supseteq$" besteht trivialerweise. Wir haben zu zeigen, es gilt "$\subseteq$". Sei

$$x \in X.$$

Weil die T_i den Raum X überdecken, liegt x in einem T_i. Da jedes T_i in einer der Mengen von S liegt, liegt x in einem Z_α. Unter allen $\alpha\in J$ mit $x \in Z_\alpha$ gibt es ein minimales (weil die Index-Menge J endlich ist). Ist α ein solcher minimaler Index, so gilt $x \in Y_\alpha$ (nach Definition von Y_α). Damit ist (3) bewiesen.

Zeigen wir, (3) ist eine Partition. Die Y_α sind lokal abgeschlossen, weil die Z_α abgeschlossen sind. Für je zwei verschiedene α', $\alpha'' \in J$ gilt

$$\begin{aligned} Y_{\alpha'} \cap Y_{\alpha''} &= (Z_{\alpha'} - \bigcup_{\beta<\alpha'} Z_\beta) \cap (Z_{\alpha''} - \bigcup_{\gamma<\alpha''} Z_\gamma) \\ &= Z_{\alpha'} \cap Z_{\alpha''} - (\bigcup_{\beta<\alpha'} Z_\beta \cup \bigcup_{\gamma<\alpha''} Z_\gamma) \end{aligned}$$

Wegen (1) ist der Durchschnitt

$$Z_\delta := Z_{\alpha'} \cap Z_{\alpha''}$$

ein Element von S und für den Index δ gilt, weil α' und α'' verschieden sind, zusammen mit (2):

$$\delta < \alpha' \text{ und } \delta < \alpha''.$$

Damit liegt aber Z_δ vollständig in der Menge, welche von $Z_{\alpha'} \cap Z_{\alpha''}$ abgezogen wird, d.h. es ist

$$Y_{\alpha'} \cap Y_{\alpha''} = \emptyset \text{ für } \alpha' \neq \alpha''.$$

Die Mengen Y_α sind paarweise disjunkt. Wir haben gezeigt, (3) ist eine Partition.

Zeigen wir als nächstes, daß die Partition (3) eine Stratifikation ist, d.h.

$$\bar{Y}_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\le\alpha} Y_\beta \tag{4}$$

Sei

$$x\in\bar{Y}_\alpha.$$

Nach Definition von Y_α und weil Z_α abgeschlossen ist, gilt

$$x \in Z_\alpha.$$

Unter allen $\beta\in I$ mit $\beta \le \alpha$ und $x \in Z_\beta$ gibt es ein minimales (weil die Index-Menge J endlich ist). Sei β ein solches minimales Element von J. Nach Definition von Y_β gilt dann auch

$$x \in Y_\beta.$$

Wegen $\beta \le \alpha$ liegt damit x auch in der rechten Seite von (4). Wir haben damit (4) bewiesen, und damit auch, daß (3) eine Stratifikation ist.

Zeigen wir als nächstes,

$$Z_\alpha = \bigcup_{\beta\le\alpha} Y_\beta \tag{5}$$

Für $\beta \le \alpha$ gilt

$$\begin{aligned} Y_\beta &\subseteq Z_\beta && \text{(nach Definition von } Y_\beta\text{)} \\ &\subseteq Z_\alpha && \text{(wegen } \beta \le \alpha \text{ und (2)).} \end{aligned}$$

Deshalb in (5) zumindest die Inklusion "$\supseteq$". Wir haben zu zeigen, daß auch "$\subseteq$" gilt. Sei

$$x \in Z_\alpha.$$

Weil die Indexmenge J endlich ist, gibt es unter den $\beta\in I$ mit $\beta \le \alpha$ und $x \in Z_\beta$ ein minimales. Für dieses minimale β ist $x \in Y_\beta$ (nach Definition von Y_β). Wegen $\beta \le \alpha$ liegt damit der Punkt x in der Vereinigung auf der rechten Seie von (5).

Wir haben noch zu zeigen,

Jedes T_i ist eine Vereinigung von Mengen der Gestalt Y_α.

Weil die T_i den Raum X überdecken, reicht es zu zeigen, daß für $\alpha\in J$ und $i\in I$ die folgende Implikation besteht.

$$T_i \cap Y_\alpha \ne \emptyset \Rightarrow Y_\alpha \subseteq T_i.$$

Sei

$$x \in T_i \cap Y_\alpha.$$

Wir haben zu zeigen $Y_\alpha \subseteq T_i$. Nach Definition von Y_α und Z_α gilt

$$Y_\alpha \subseteq Z_\alpha = (X\text{-}U_{i_1})\cap\ldots\cap(X\text{-}U_{i_r})\cap(X\text{-}V_{j_1})\cap\ldots\cap(X\text{-}V_{j_s})$$

Wir können dabei annehmen,

$$\{i_1,\ldots,i_r\} = \{\, i \in I \mid Z_\alpha \subseteq X\text{-}U_i \,\} \tag{6}$$

und

$$\{j_1,\ldots,j_s\} = \{\, i \in I \mid Z_\alpha \subseteq X\text{-}V_i \,\} \tag{7}$$

Nach Wahl von x gilt insbesondere

$$x \in T_i = U_i \cap (X\text{-}V_i).$$

Wegen $x \in U_i$ ist i von allen i_ν verschieden,

$$i \notin \{i_1,\ldots,i_r\}. \tag{8}$$

Außerdem liegt i in der Menge der j_ν,

$$i \in \{j_1,\ldots,j_s\}, \tag{9}$$

denn andernfalls wäre $Z_\alpha \not\subseteq X\text{-}V_i$ (nach (7)), also $Z_\alpha \cap (X\text{-}V_i)$ eine Menge der Gestalt

$$Z_\beta = Z_\alpha \cap (X\text{-}V_i) \text{ mit } \beta < \alpha$$

(wegen (1) und (2)). Wegen $x \in Z_\beta$ kann dann aber x nicht in Y_α liegen (nach Definition von Y_α). Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von x. Es gilt neben (8) auch (9). Wegen (9) und (7) gilt

$$Y_\alpha \subseteq Z_\alpha \subseteq (X\text{-}V_i) \tag{10}$$

und wegen (8) und (6) erhalten wir

$$Z_\alpha \not\subseteq X\text{-}U_i.$$

Wäre

$$Y_\alpha \subseteq X - U_i$$

so würde gelten

$$Y_\alpha \subseteq Z_\alpha \cap (X\text{-}U_i) = Z_\beta \text{ mit } \beta < \alpha,$$

im Widerspruch zur Definition von Y_α. Es folgt

$$Y_\alpha \not\subseteq X\text{-}U_i\,. \tag{11}$$

Nach (5) ist $X\text{-}U_i$ Vereinigung von gewissen Y_β, wobei Y_α unter diesen Y_β nicht vorkommt (wegen (11)). Nun sind aber die Y_γ paarweise disjunkt, denn sie sind die Teile einer Stratifikation. Deshalb gilt sogar

$$Y_\alpha \cap (X\text{-}U_i) = \varnothing,$$

also

$$Y_\alpha \subseteq X - (X\text{-}U_i) = U_i.$$

Zusammen mit (10) folgt $Y_\alpha \subseteq U_i \cap (X\text{-}V_i) = T_i$, wie behauptet.

QED.

4.8 Verfeinerung zu guten Stratifikationen

Sei X ein Noetherscher topologischer Raum. Dann kann jede endliche Partition von X zu einer endlichen guten Stratifikation verfeinert werden.

Beweis. Sei

$$X = \vee_{i\in I} X_i$$

eine endliche Partition. Wir fixieren eine irreduzible Komponente Z von X. Wegen

$$X = \bigcup_{i\in I} \overline{X}_i$$

gilt

$$Z = \bigcup_{i\in I} Z \cap \overline{X}_i.$$

Rechts steht eine endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen von X. Weil Z irreduzibel ist, gibt es ein i mit $Z = Z \cap \overline{X}_i$, also

$$Z \subseteq \overline{X}_i\,.$$

Weil X_i lokal abgeschlossen ist, ist X_i offen in $\overline{X}_i$, also

$$Z \cap X_i \text{ offen in } Z \cap \overline{X}_i = Z.$$

Indem wir von X die von Z verschiedenen Komponenten von X abziehen, erhalten wir eine nicht-leere offene Teilmenge Z' von X, welche ganz in Z liegt. Der Durchschnitt

$$Z' \cap Z \cap X_i \text{ ist offen in } Z', \text{ also offen in } X.$$

Damit enthält $Z \cap X_i$ eine offene Teilmenge von X, sagen wir

$$U \subseteq X \text{ offen und } U \subseteq Z \cap X_i.$$

Wir betrachten die folgende Partition von X_i ,

$$X_i = U \vee X_i^1 \vee X_i^2$$

mit

$$X_i^1 := (X_i - U) \cap \overline{U}$$

$$X_i^2 := ((X_i - U) \cap (X - \overline{U}).$$

zusammen mit der folgenden Partition von $X_{i'}$, für alle $i' \neq i$,

$$X_{i'} = X_{i'}^1 \vee X_{i'}^2$$

mit

$$X_{i'}^1 := X_{i'} \cap \overline{U}$$

$$X_{i'}^2 := X_{i'} \cap (X-\overline{U}).$$

Weil die X_i eine Partition von X bilden, bilden X_i^1 und X_i^2 zusammen mit den $X_{i'}^1$, $X_{i'}^2$ eine Partition von

$$X\text{-}U = \vee X_\ell^k. \tag{1}$$

Die Menge X-U ist abgeschlossen in X und echt kleiner als X. Wir wenden noethersche Induktion an und erhalten eine endliche gute Stratifikation

$$X\text{-}U = \vee_{\alpha\in A} T_\alpha$$

welche die Partition (1) verfeinert. Nach Konstruktion bilden U und X_i^1 zusammen mit den $X_{i'}^1$ eine Partion von $\overline{U}$,

$$\overline{U} = U \vee X_i^1 \vee_{i' \neq i} X_{i'}^1 .$$

Damit ist

$$X = U \vee \vee_{\alpha\in A} T_\alpha$$

eine gute Stratifikation von X, welche die vorgegebene Partition mit den X_i als Teilen verfeinert.

QED.

5 Einige Ergänzungen zur algebraischen Geometrie

Bei den nachfolgenden Ausführungen handelt es sich um eine korrigierte Version des Vorlesungsskripts meiner Vorlesung zur algebraischen Geometrie von 2002 in Leipzig. Sie geben im wesentlichen den Text des ersten Kapitels des ersten Teils des Lehrbuchs von Schafarevich [2] wieder (dem russischen Original von [1]). Die Herangehensweise betont sehr viel stärker den geometrischen Aspekt des Gegenstandes als die im ersten Kapitel von Springer. Der Text enthält einige einfache und recht interessante Anwendungen der klassischen algebraischen Geoemetrie, die in Beziehung stehen zu den “großen” modernen Themen der Disziplin (wie den Modul-Räumen).

Die im Buch von Springer nur sehr knapp behandelten Begriffe der Dimension und des nicht-singulären Punkts werden im Buch von Schafarevich sehr viel sorgfältiger motiviert und sehr viel ausführlicher betrachtet.

Bitte erwägen Sie, anstelle dieser Ausführungen das Original (bzw. dessen englische Übersetzung) zu lesen, und auf diesen Text nur zuzugreifen, wenn Sie Hilfe brauchen.

Der Inhalt von 5.x entspricht dem Paragraph x von Kapitel I von Teil I im Buch von Schafarevich. Der Inhalt von 5.x.y entspricht dem Abschnitt y von Paragraph x in Kapitel I des ersten Teils des Buchs von Schafarevich.

5.1. Ebene algebraische Kurven

Rationale Kurven

5.1.1 Die Kurve $y^2 = x^2 + x^3$

Behauptung

Die Koordinaten der Punkte dieser Kurve lassen sich als rationale Funktionen eines Parameters t ausdrücken:

$$x = t^2 - 1,\ y = t(t^2-1). \tag{1}$$

Umgekehrt ist jeder Punkt (x,y), für welchen es ein t gibt, sodaß (1) gilt, ein Punkt der Kurve.

Geometrische Deutung:

Der Punkt (x, y) ist ein Schnittpunkt der Kurve mit der Geraden $y = tx$.

Beweis. Sei (x,y) ein vorgegebener Punkt der Kurve. Ist (x,y) = (0, 0) der Ursprung des Koordinatensystems, so erhält man dessen Koordinaten aus der Parameterdarstellung (1) für t = 0. Sie jetzt (x,y) von Ursprung verschieden. Die Gerade durch den Ursprung und den Punkt (x,y) hat die Gestalt

$$y = tx. \tag{2}$$

Der vorgegeben Punkt (x,y) ist ein Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve. Für diesen Punkt und den zugehörigen Paramter t gilt (2) und die Kurvengleichung ist erfüllt, d.h. es ist auch

$$(tx)^2 = x^2 + x^3,$$

also

$$0 = x^2((1-t^2) + x).$$

Weil (x,y) vom Ursprung verschieden ist, gilt $x \neq 0$, also

$$0 = 1 - t^2 + x,$$

also

$$x = t^2 - 1$$

und

$$y = t\cdot x = t\cdot(t^2 - 1).$$

Wir haben gezeigt, für jeden Punkt (x,y) der Kurve gibt es ein t, für welches (1) gilt.

Sei (x,y) ein Punkt, dessen Koordinaten die Gestalt (1) haben. Wir müssen noch zeigen, daß dann (x,y) ein Punkt der Kurve ist. Es gilt

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 - x^3 &= t^2(t^2-1)^2 - (t^2 - 1)^2 - (t^2-1)^3 \\ &= (t^2-1)^2\cdot(t^2 - 1 - (t^2-1)) \\ &= (t^2-1)^2\cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also liegt (x,y) tatsächlich auf der Kurve.

QED.

5.1.2 Begriff der ebenen algebraischen Kurve

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und f(x,y) ein Polynom in zwei Unbestimmten mit Koeffizienten aus k. Eine eine Menge der Gestalt

$$V(f) := \{(x,y)\in k^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

heißt dann <u>ebene algebraische Kurve</u> (mit der Gleichung f(x,y) = 0).

Bemerkungen:

(i) Der Körper k sollte tatsächlich algebraisch abgeschlossen sein: V(f) mit f(x,y) = x^2+y^2+1 hat keine Punkt mit Koordinaten in $\mathbb{R}$.

(ii) Zerfällt f in zwei Faktoren, f = g·h, so ist V(f) = V(g)∪V(h) Vereinigung von zwei Teilkurven. Ist f irreduzibel, so nennen wir auch die Kurve V(f) <u>irreduzible Kurve</u>.

(iii) Jede ebene algebraische Kurve ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler.

5.1.3 Begriff der rationalen ebenen algebraischen Kurve

Sei X: f(x,y) = 0 eine irreduzible ebene algebraische Kurve. Dann heißt X <u>rational</u>, wenn es zwei rationale Funktionen φ(t) und ψ(t) gibt, die nicht beide konstant sind, mit

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = 0$$

identisch in t. Man nennt in dieser Situation (φ(t), ψ(t)) eine Parametrisierung der Kurve.

Bemerkungen

(i) Mit endlich vielen Ausnahmen ist $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ für jedes $t_0\in k$ ein Punkt der Kurve.

(ii) Wir werden zeigen, bei geeignet gewählter Parametrisierung erhält man auf diese Weise jeden Punkt der Kurve mit eventueller Ausnahme von endlich vielen. Den Parameterwert t kann man dabei als rationale Funktion

$$t = \chi(x,y)$$

der Koordinaten des Kurvenpunktes schreiben.

(iii) Liegen die Koeffizienten der Parametrisierung in einem Teilkörper, so bekommt man Punke mit Koordinaten aus diesem Teilkörper, falls t dort variiert.

(iv) Parametrisierungen sind nützlich bei der Berechnung von Integralen.

5.1.4 Beispiele rationaler Kurven

V(f) ist rational, falls f linear ist.
V(f) ist rational falls f quadratisch ist.

Beweis. Der Fall f linear ist trivial. Im Fall, daß f quadratisch ist gehe man vor wie in 5.1.1, d.h. man fixiere einen Punkt p_0 auf der Kurve und betrachte die Gerade durch diesen Punkt. Für jeden Punkt der Kurve, der von p_0 verschieden ist, erhält man eine solche Gerade durch p_0. Umgekehrt liefert jede Gerade durch p_0, die von der Tangente in p_0 verschieden ist einen von p_0 verschiedenen zweiten Schnittpunkt. Die Abbildung, die den Anstieg der Geraden durch p_0 abbildet auf den zugehörigen zweiten Schnittpunit (und im Fall einer Tangente auf p_0), liefert die gesuchte Parameter-Darstellung.

QED.

5.1.5 Die Kurve $x^n+y^n = 1$ für $n > 2$

Behauptung

Die Kurve ist nicht rational für $n > 2$, falls n kein Vielfaches der Charakteristik des Grundkörpers k ist.

Beweis. Angenommen, die Kurve ist rational. Dann gibt es rationale Funktionen

$$\varphi(t) = \frac{p(t)}{r(t)} \text{ und } \psi(t) = \frac{q(t)}{r(t)}$$

die die Kurve parametrisieren. Wir können dabei annehmen, die Polynome p, q und r haben keinen gemeinsamen Teiler. Nach Voraussetzung gilt

(1) $p^n + q^n - r^n = 0$

Wir differenzieren und erhalten, da n kein Vielfaches der Charakteristik von k ist,

(2) $p^{n-1}\cdot p' + q^{n-1}\cdot q' - r^{n-1}\cdot r' = 0.$

Nun interpretieren wir (1) und (2) als lineares Gleichungssystem für die p^{n-1}, q^{n-1} und $-r^{n-1}$ mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat den Rang 2 (weil sonst die beiden Zeilen proportional wären mit einer rationalen Funktion als Proportionalitätsfaktor, was der Teilerfremdheit von p, q, r widerspricht). Die Lösungen des Systems sind also proportional zum Tripel der drei 2×2-Unterdeterminanten.[25] Da p, q und r teilerfremd sind, folgt

$$p^{n-1} \mid qr' - rq'$$
$$q^{n-1} \mid pr' - rp'$$
$$r^{n-1} \mid pq' - qp'$$

Es ist leicht zu sehen das diese drei Bedingungen aus Gradgründen nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Sind a, b und c die Grade von p, q und r und gilt zum Beispiel

$$a \ge b \ge c$$

so liefert die erste Bedingung

$$a\cdot(n-1) \le b + c - 1 \le a + a - 1$$

im Widerspruch zu $n > 2$.
QED.

5.1.6 Problem

Wie entscheidet man ob eine Kurve rational ist ?

Wir werden jetzt zeigen, dies ist in Wahrheit ein Problem der Theorie der Körper.

Verbindung mit der Theorie der Körper

5.1.7 Der rationale Funktionenkörper einer ebenen algebraischen Kurve

Sei

$$X: f(x,y) = 0$$

eine irreduzible algebraische Kurve über dem Körper k (mit dem irreduziblen Polynom f(x,y)). Wir bezeichnen mit k(X) die folgende Menge von Äquivalenzklassen aller Brüche

$$\frac{p(x,y)}{q(x,y)},$$

wobei p und q Polynome mit Koeffizienten aus k seien und q kein Vielfaches von f. Zwei solche Brüche

---

[25] Man verdopple eine der Zeilen und entwickle die zugehörige Determinante (die Null ist) nach der hinzugfügten Zeile. Man erhält, das Tripel der Unterdeterminanten ist eine (nicht-triviale) Lösung.

$$\frac{p}{q} \text{ und } \frac{r}{s}$$

sollen genau dann zur selben Äquivalenzklasse gehören, wenn gilt

$$f \mid p\cdot s - r\cdot q \;.$$

Es ist leicht zu sehen, die gewöhnliche Addition und Multiplikation rationaler Funktionen induziert auf k(X) die Struktur eines Körpers. Er heißt rationaler Funktionenkörper der Kurve X.

Von zwei rationalen Funktionen, die dasselbe Element des Körpers k(X) repräsentieren, sagen wir im folgenden, sie seien gleich auf der Kurve X.

Bemerkungen

(i) Alle Element von k(X) lassen sich als rationale Funktionen von x und y ausdrücken. Der Transzendenzgrad des Körpers ist also höchstens 2.

(ii) Die Elemente x und y des Körpers sind algebraisch abhängig, denn in k(X) gilt $f(x,y) = 0$. Der Transzendenzgrad des Körpers ist somit 1.

(iii) Ist X eine Gerade, die zum Beispiel durch die Gleichung $y = 0$ gegeben ist, so ist jede rationale Funktion $\varphi(x,y)$ auf X gleich $\varphi(x,0)$, d.h. k(X) ist gerade der Funktionenkörper in einer Unbestimmten,

$$k(X) = k(x).$$

5.1.8 Der rationale Funktionenkörper einer rationalen Kurve

Die irreduzible ebene algebraische Kurve X über k ist genau dann rational, wenn ihr Funktionenkörper isomorph ist (über k) zum rationalen Funktionenkörper in einer Unbestimmten,

$$k(X) \cong k(t).$$

Beweis. Ist k(X) isomorph zu k(t), so definieren die zu x und y gehörigen rationalen Funktionen in t eine Parametrisierung von X.

Sei jetzt umgekehrt, X rational und und $(\varphi(t), \psi(t))$ eine Parametrisierung. Wir betrachten die Abbildung

(1) $\quad k(X) \to k(t), \chi(x,y) \mapsto \chi(\varphi(t), \psi(t)).$

Es reicht zu zeigen, diese Abbildung ist korrekt definiert, denn in diesem Fall ist (1) ein Homomorphismus von k-Algebren. Da k(X) ein Körper ist, muß die Abbildung injektiv sein (da Körper keine echten Ideale besitzen). Das Bild von (1) ist dann ein Teilkörper von (1). Nach dem Satz von Lüroth[26] ist ein solcher Körper selbst isomorph zu k(t).

Zeigen wir, die Abbildung (1) ist wohldefiniert. Dazu schreibenwir

$$\chi(x,y) = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}$$

mit teilerfremden Polynomen A und B, wobei B kein Vielfaches von f sein soll. Wir haben zu zeigen,

$$B(\varphi(t), \psi(t))$$

ist nicht identisch Null und

$$\frac{A(\varphi(t),\psi(t))}{B(\varphi(t),\psi(t))}$$

hängt nicht von der speziellen Wahl von A und B ab.

Der zweite Teil der zu beweisenden Aussage folgt unmittelbar aus der Defintion von k(X), falls der erste Teil gilt: ist nämlich

---

[26] siehe vav der Waerden [1], Teil 1, Kapitel 10, §73 oder Jacobson [5], Kapitel 8, Abschnitt 8.14, Theorem 8.38.

$$\frac{C(x,y)}{D(x,y)}$$

ein weiterer Repräsentent von $\chi(x,y) \in k(X)$ (mit C und D teilerfremd) so gilt nach Definition von k(X)

$$f \mid A \bullet D - C \bullet B.$$

Wir setzen die Parametrisierung ein und erhalten

$$0 = A(\varphi(t), \psi(t)) \cdot D(\varphi(t), \psi(t)) - C(\varphi(t), \psi(t)) \cdot Q(\varphi(t), \psi(t))$$

also

$$\frac{A(\varphi(t),\psi(t))}{B(\varphi(t),\psi(t))} = \frac{C(\varphi(t),\psi(t))}{D(\varphi(t),\psi(t))}$$

Wir haben noch zu zeigen, daß $B(\varphi(t), \psi(t))$ nicht identisch Null ist. Weil B kein Vielfaches des irreduziblen Polynoms f ist, sind f und B teilerfremd,

$$\mathrm{ggT}(f, B) = 1.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß x tatsächlich im Polynom vorkommt. Wir wählen Elemente $a', b' \in k(x)[y]$ mit

$$a' \bullet f + b' \bullet B = 1 \text{ in } k(x)[y]$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner von a und b erhalten wir eine Identität der Gestalt

$$a \bullet f + b \bullet B = c \text{ in } k[x,y] \text{ mit } a,b \in k[x,y] \text{ und } c \in k[x] - \{0\}.$$

Durch Einsetzen der Parametrisierung erhalten wir

$$b(\varphi(t), \psi(t)) \bullet B(\varphi(t), \psi(t)) = c(\varphi(t))$$

Dieselben Argumente mit vertauschten Rollen von x und y zeigen, es gibt Polynome

$\tilde{b} \in k[x,y]$ und $\tilde{c} \in k[y] - 0$

mit

$$\tilde{b}(\varphi(t), \psi(t)) \bullet B(\varphi(t), \psi(t)) = \tilde{c}(\varphi(t))$$

Weil c und $\tilde{c}$ als von 0 verschiedene Polynome in einer Unbestimmten nur endlich viele Nullstellen besitzen, reicht es zu zeigen, eine der rationalen Funktion $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ besitzt unendlich viele Werte. Weil $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ nach Definition des Begriffs der rationalen Kurve nicht beide konstant sind (vgl. 5.1.3), reicht es zu zeigen, der Wertevorrat einer nicht-konstanten rationalen Funktion ist unendlich. Die Behauptung folgt damit aus dem nachfolgenden Lemma.

QED.

Lemma

Für je zwei teilerfremde Polynome $p, q \in k[t] - \{0\}$ sind der Definitionsbereich

$$\mathrm{Def}(r) := \{x \in k \,]\, q(x) \neq 0\}$$

der Funktion

$$r = \frac{p}{q} : \mathrm{Def}(r) \longrightarrow k,\ x \mapsto r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

sowie deren Wertevorrat

$$\mathrm{Im}(r) := \{r(x) \mid x \in D\}$$

unendliche Teilmengen des algebraisch abgeschlossenen Körpers k.

Für je endlich viele rationale Funktionen r_i: $\mathrm{Def}(r_i) \longrightarrow k$ ist sogar der Durchschnitt von deren Definitionsberreichen unendlich.

Beweis.

1. Schritt. Für jedes nicht-konatante Polynom $p \in k[t]$ und jede unendliche Menge $S \subseteq k$ ist die Menge $p(S)$ unendlich.

Angenommen $p(S)$ ist endlich, sagen wir $p(S) = \{c_1,...,c_n\}$. Dann gilt

$$S \subseteq \{x \in k \mid p(x) - c_1 = 0\} \cup ... \cup \{x \in k \mid p(x) - c_n = 0\}$$

Weil jedes Polynom höchstens endlich viele Nullstellen besitzt, ist aber jede der endlich vielen Mengen

$$\{x \in k \mid p(x) - c_i = 0\}$$

endlich, d.h. S ist endlich im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen.

2. Schritt. Beweis der Behauptung.

Die Menge $D := \mathrm{Def}(r)$ ist unendich, weil q nur endlich viele Nullstellen besitzt und k als algebraisch abgeschlossener Körper unendlich ist. Angenommen, $\mathrm{Im}(r)$ ist endlich, sagen wir

$$\mathrm{Im}(r) = \{c_1, ... , c_n\}.$$

Dann gilt

$$D \subseteq \{x \in k \mid p(x) - c_1 \bullet q(x) = 0\} \cup ... \cup \{x \in k \mid p(x) - c_n \bullet q(x) = 0\}.$$

Jede der endlich vielen Mengen

$$\{x \in k \mid p(x) - c_i \bullet q(x) = 0\}$$

ist aber - weil p und q teilerfremd sind - endlich. Das steht im Widerspruch zur Unendlichkeit von D.

Für je endlich viele $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ mit p_i und q_i teilerfremd ist der Durchschnitt von deren Defintionsbereichen gerade der Definitionsbereich des Inversen des Produkts der q_i,

$$\bigcap \mathrm{Def}(r_i) = \mathrm{Def}(\frac{1}{q}) \text{ mit } q = \text{Produkt der endlich vielen } q_i.$$

Der Durchschnitt ist damit ebenfalls unendlich.

QED.

Bemerkung

Der obige Beweis läßt sich sehr viel einfacher gestalten, wenn man den Hilbertschen Nullstellensatz (5.2.1 (i)) verwendent.

5.1.9 Eigenschaften gewisser Parametrisierungen

Seien $X: f(x,y) = 0$ eine ebene rationale Kurve über k und $i: k(X) \to k(t)$ der zugehörige Isomorphismus. Weiter seien

$$\varphi(t) = i(x)$$

$$\psi(t) = j(y)$$

die den Variablen x bzw y entsprechenden rationalen Funktionen. Dann ist

$$(\varphi(t), \psi(t))$$

eine Parametrisierung der Kurve mit folgenden Eigenschaften.

(i) Jeder Punkt von X mit Ausnahme von endlich vielen hat die Gestalt
$(\varphi(t_0),\psi(t_0))$ mit $t_0 \in K$.

(ii) Der Parameter t_0 in der Darstellung (i) ist außer bei endlich vielen Punkten eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir haben bereits gesehen, $(\varphi(t), \psi(t))$ ist tatsächlich eine Parametrisierung.[27]
Sei jetzt $\chi(x,y)$ eine rationale Funktion mit

$$i(\chi) = t.$$

Anwenden von i bedeutet gerade, man ersetzt x und y durch $\varphi(t)$ und $\psi(t)$. Insbesondere ist also

(1) $\chi(\varphi(t), \psi(t)) = t$ in $k(t)$.

Anwenden von i^{-1} bedeutet gerade, man ersetzt t durch $\chi(x,y)$. Wir wenden i und danach i^{-1} auf x und y an und erhalten

(2) $x = \varphi(\chi(x,y))$ in $K(X)$.

(3) $y = \psi(\chi(x,y))$ in $K(X)$

Relation (1) bedeutet, verschiedene Werte des Parameters t gehen in verschiedene Punkte $(\varphi(t), \psi(t))$ über. Dabei sind die endlich vielen t, in denen die linke Seite von (1) nicht definiert ist, ausnehmen. Wir haben gezeigt, es gilt Aussage (ii).

Analog bedeuten die Relationen (2) und (3), jeder Punkt (x,y) der Kurve ist Bild eines Parameters mit endlich vielen Ausnahmen, in denen $\chi(x,y)$ nicht definiert bzw. die rechten Seiten von (2) oder (3) nicht definiert sind. Mit anderen Worten, es gilt (i).
QED.

Birationale Isomorphismen von Kurven

5.1.10 Definition: rationale Abbildung

Seien

$$X: f(x,y) = 0$$
$$Y: g(x,y) = 0$$

zwei ebene irreduzible Kurven über k. Eine rationale Abbildung

$$X \dashrightarrow Y,\ (x,y) \mapsto (\varphi(x,y), \psi(x,y)),$$

ist ein Paar rationaler Funktionen $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ derart, daß die rationale Funktion

$$g(\varphi(x,y), \psi(x,y))$$

Null ist auf X (d.h. Punkte von X gehen in Punkte von Y über).

Zwei irreduzible Kurven X und Y heißen birational isomorph, wenn es zueinander inverse rationale Abbildungen zwischen X und Y gibt.

5.1.13 Beispiel

$$X: y^2 = f(x) \tag{1}$$

Dabei sei f vom Grad 2n. Wir schreiben

$$f(x) = g(x)(x-\alpha)$$

und setzen

$$u := \frac{1}{x-\alpha}$$

$$v := \frac{y}{(x-\alpha)^n}$$

Indem wir beide Seiten von (1) durch $(x-\alpha)^{2n}$ teilen erhalten wir

[27] Weil x und y zusammen den Körper k(X) erzeugen, also können sie nicht beide konstant sein. Weil das durch f repräsentierte Element von k(X) gleich 0 ist, ist dessen Bild bei i ebenfalls 0, d.h.

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = 0 \text{ in } k(t).$$

(2) Y: $v^2 = h(u)$

mit einem Polynom $h(u) = \frac{g(x)}{(x-\alpha)^{2n-1}}$ des Grades 2n-1 in u.

Auf diese Weise ist eine rationale Abbildung $X \dashrightarrow Y$ definiert. Eine Umkehrung ist durch

$$x = u^{-1} + \alpha$$
$$y = vu^{-n}$$

gegeben.

5.1.12 Birationalität und Funktionenkörper

Zwei ebene algebraische Kurven sind genau dann birational isomorph, wenn ihre Funktionenkörper (über k) isomorph sind.
Beweis: leicht

5.2 Abgeschlossene Teilmengen und reguläre Funktionen

Im weiterem wird k stets ein und derselbe algebraisch abgeschlossene Körper sein.

5.2.1 Abgeschlossene (=algebraische) Mengen

(a) Definition (affiner Raumn)

Den <u>affinen n-dimensionalen Raum</u> bezeichnen wir mit

$$\mathbb{A}^n := \{(a_1,...,a_n) \mid a_1,...,a_n \in k\}.$$

(b) Definition (abgeschlossene Menge im affinen Raum)

Eine <u>abgeschlossene Teilmenge</u> des A^n soll eine Menge der Gestalt

$$V(f_1,...,f_m) = \{(a_1,...,a_n) \mid f_1 (a_1,...,a_n) = ... = f_m (a_1,...,a_n) = 0 \}$$

sein, wobei die

$$f_i(T) = f_i(T_1,...,T_n) \in k[T] = k[T_1,...,T_n]$$

Polynome in den n Unbestimmten $T_1,...,T_n$ sein sollen mit Koeffizienten aus k. Die f_i heißen auch “definierende Gleichungen” von $V(f_1,...,f_m)$

(c) Bemerkungen (Topologie-Axiome)

(i) Eine Menge X, die durch eine unendliche Menge $M \subseteq k[T]$ von Polynomen definiert wird,
$$X = V(M) = \{ a \in A^n \mid f(a) = 0 \text{ für alle } f \in M\}$$
ist ebenfalls abgeschlossen.
(ii) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
(iii) Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
(iv) $\mathbb{A}^n$ ist abgeschlossen.
(v) Die leere Menge ist abgeschlossen.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Sei I das von der Menge M erzeugte Ideal von k[T], d.h. I bestehe aus allen Linearkombinationen von Elementen aus M,

$$g_1 m_1 + ... + g_r m_r ,\ g_i \in k[T],\ m_i \in M,$$

Aus der Algebra-Vorlesung wissen wir, k[T] ist ein Noetherscher Ring, d.h. jedes Ideal ist endlich erzeugt. Es gibt also endlich viele Polynome $f_1,...,f_s$, die ebenfalls das Ideal I erzeugen. Es gilt damit

$$V(M) = V(I) = V(f_1,...,f_s).$$

Zu (ii). Man betrachte die Menge M aller definierenden Gleichungen aller Mengen der Familie. Dann ist V(M) gerade der Durchschnitt, also eine abgeschlossene Menge.
Zu (iii). Seien $X' = V(f_1,...,f_r)$ und $X'' = V(g_1,...,g_s)$ und sei M die (endliche) Menge der Produkte der Gestalt $f_i \cdot g_j$. Dann ist

$$X' \cup X'' = V(M),$$

d.h. die Vereinigung ist abgeschlossen.

Zu (iv). $A^n = V(0)$.

Zu (v). $\emptyset = V(1)$.
QED.

(d) Definition (Zariski-Topologie des A^n)

Eine Teilmenge des $\mathbb{A}^n$ heißt offen, wenn sie Komplement einer abgeschlossenen Menge ist.

Die Aussagen von (c) besagen gerade, die offenen Mengen des $\mathbb{A}^n$ definieren eine Topologie auf dem affinen Raum. Diese Topologie heißt Zariski-Topologie.

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine beliebige Menge. Wir setzen

$$\overline{X} := \text{Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von } X.$$

Diese Menge heißt Abschließung von X.

(e) Beispiel (die offenen Menge der affinen Geraden)

Die offenen Mengen des $\mathbb{A}^1$ sind die leere Menge, der gesamte Raum und die Komplemente der endlichen Teilmengen.

(f) Beispiel (die abgeschlossenen Mengen der affinen Ebene)

Eine solche Menge X ist durch ein Gleichungssystem der Gestalt

$$f_1(T_1,T_2) = f_2(T_1,T_2) = ... = f_r(T_1,T_2) = 0$$

gegeben. Sind die Polynome f_i alle identisch Null, so ist

$$X = \mathbb{A}^2.$$

Kommt unter den f_i eine von Null verschiedene Konstante vor, so ist

$$X = \emptyset$$

Seien jetzt die f_i nicht-konstante und nicht alle identisch Null. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die f_i keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

Betrachten wir die f_i als Elemente von $k(T_1)[T_2]$. Auch als Elemente dieses Rings besitzen die sie keinen gemeinsamen Teiler. Mit Hilfe des euklidischen Algorithmus sehen wir, es gilt

$$1 = g_1 f_1 + ... + g_r f_r \text{ mit gewissen } g_i \in k(T_1)[T_2].$$

Dies ist eine Relation zwischen rationalen Funktionen, wobei im Nenner nur Polynome in T_1 allein vorkommen. Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner und erhalten eine Relation der Gestalt

$$h = g_1 f_1 + ... + g_r f_r \text{ mit } g_i \in k[T_1, T_2] \text{ und } h \in k[T_1] - \{0\}.$$

Weil die f_i nicht identisch Null sind auf X, gilt dies auch für h. Als Polynom in einer Variablen hat h aber nur endlich viele Nullstellen. Mit anderen Worten, für die erste Koordinate eines Punktes aus X gibt es nur endlich viele Möglichkeiten.
Wir wiederholen dieselbe Argumentation mit T_1 und T_2 vertauscht und sehen so,

$X \subseteq \mathbb{A}^2$ ist endlich (eventuell leer).

Es ist noch der Fall zu betrachten, daß die f_i einen (nicht-trivialen) Teiler besitzen. Sei g der größte gemeinsame Teiler der f_i,

$$f_i = g_i \cdot g$$

Dann gilt $X = V(f_1,...,f_r) = V(g_1,...,g_r) \cup V(g)$. Da die g_i nach Konstruktion keinen gemeinsamen Teiler besitzen, ist $V(g_1,...,g_r)$ eine endliche Menge. Die Menge V(g) ist eine eben Kurve:

$X = \{\text{endliche Menge}\} \cup \{\text{Vereinigung endlich vieler irreduzibler Kurven}\}$

(g) Direkte Produkte abgeschlossener Mengen

Seien

$X = V(f_1(S),...f_r(S)) \subseteq \mathbb{A}^m$

$Y = V(g_1(T),...,g_s(T)) \subseteq \mathbb{A}^n$

abgeschlossene Mengen. Das direkte Produkt dieser Mengen ist eine abgeschlossene Menge:

$X \times Y = V(f_1(S),...f_r(S),\ g_1(T),...,g_s(T)) \subseteq \mathbb{A}^{m+n}$

(h) affine Hyperflächen

Eine <u>affine Hyperfläche</u> ist eine Menge der Gestalt

$V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$

d.h. eine abgeschlossene Menge mit nur einer definierenden Gleichung.

(i) Hilbertscher Nullstellensatz

Seien $f_1,...,f_r,g \in k[T]$ Polynome mit Koeffizienten aus dem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Das Polynom g sei Null in allen Punkten von $V(f_1,...,f_r)$. Dann ist eine Potenz von g eine Linearkombination der f_i,

$$g^s \in (f_1,...,f_r).$$

Einen Beweis findet man zum Beispiel in
Bourbaki [1], Kapitel 4, §3, Abschnitt 3.
Lang [2], Kapitel 10, §2
Matsumura [2], Kapitel 5, Theorem 5.4.
van der Waerden [1], Band 2, Kapitel 16, §130.

5.2.2 Reguläre Funktionen auf abgeschlossenen Mengen

Sei X eine abgeschlossene Teilmenge des affinen Raums $\mathbb{A}^n$ über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k.

(a) Definition (reguläre Funktionen, Koordinatenring)

Eine Funktion f: X → k heißt regulär, wenn es ein Polynom $g \in k[T]=k[T_1,...,T_n]$ gibt mit

$$f(x) = g(x)$$

für jedes $x \in X$. Die Menge aller regulären Funktionen X → k wird mit

$$k[X]$$

bezeichnet. Bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von Abbildungen mit Werten in k ist dies offensichtlich ein kommutativer Ring mit 1. Er heißt auch <u>Koordinatenring</u> von X. Er wird von den Einschränkungen der Koordinatenfunktionen

$$p_i: A^n \to k, (x_1,...,x_n) \mapsto x_i$$

auf X erzeugt.

(b) Bemerkungen

(i) Das Polynom g ist durch f nicht eindeutig festgelegt. Man kann zum Beispiel eine definierende Gleichung von X zu g addieren.

(ii) Nach Definition gibt es eine surjektive Abbildung

$$k[T] \twoheadrightarrow k[X], g \mapsto g|_X ,$$

die jedem Polynom die zugehörige reguläre Funktion zuordnet. Diese Abbildung ist offensichlich ein Ring-Homomorphismus.

(iii) Der Kern des Homomorphismus von (ii) wird mit

$$I(X) := \mathrm{Ker}(k[T] \longrightarrow k[X], g \mapsto g|_X)$$

bezeichnet. Er heißt <u>Ideal der abgeschlossenen Menge</u> X. Er besteht aus denjenigen Polynomen, die auf X identisch Null sind. Insbesondere liegen auch die definierenden Gleichungen von X in I(X).

(iv) Nach dem Homomorphiesatz für Ringe gilt

$$k[X] = k[T]/I(X).$$

(c) Beispiel (ein einzelner Punkt)

Sei $X = \{(a_1,...,a_n)\} \subseteq A^n$ eine einpunktige Menge. Dann gilt offensichtlich

$$k[X] = k$$

und $(T_1-a_1,...,T_n-a_n) \subseteq I(X)$. Da $(T_1-a_1,...,T_n-a_n)$ ein maximales Ideal von k[T] ist, gilt in der letzteren Inklusion sogar das Gleichheitszeichen,

$$I(X) = (T_1-a_1,...,T_n-a_n).$$

(d) Beipiel (der affine Raum)

Sei $X = \mathbb{A}^n$. Verschiedene Polynome definieren verschiedene Funktionen des $\mathbb{A}^n$, d.h. die Abbildung

$$k[T] \to k[\mathbb{A}^n]$$

ist nicht nur surjektiv sondern auch injektiv, d.h.

$$k[\mathbb{A}^n] = k[T]$$

und

$$I(\mathbb{A}^n) = (0).$$

(e) Beispiel (Hyperbel)

Sei $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ die ebene Kurve mit der Gleichung

$$f(T_1,T_2) = T_1T_2 - 1.$$

Dann gilt

$$k[X] = k[T_1, T_1^{-1}] \subseteq k(T_1),$$

d.h. k[X] besteht aus allen rationalen Funktionen der Gestalt

$$\frac{p(T_1)}{T_1^n}$$

mit einem Polynom $p \in k[T_1]$. Es ist nicht schwer zu zeigen[28], das Ideal von X besteht gerade aus den Vielfachen der definierenden Gleichung f,

$$I(X) = (T_1T_2 - 1)k[T_1, T_2].$$

(f) Der Koodinatenring eines direkten Produkts

Seien

$$X = V(f_1(S),...f_r(S)) \subseteq \mathbb{A}^m$$

$$Y = V(g_1(T),...,g_s(T)) \subseteq \mathbb{A}^n$$

abgeschlossene Mengen. Dann gilt

$$k[X\times Y] = k[X]\otimes_k k[Y]$$

Beweis. Für je zwei Funktionen $f \in k[X]$, $g \in k[Y]$ und jeden Punkt $(x,y) \in X\times Y$ setzen wir

$$\varphi(f,g)(x,y) = f(x)g(y).$$

Dann ist $\varphi(f,g)$ offensichtlich eine reguläre Funktion auf $X\times Y$ und wir haben eine Abbildung

$$k[X] \times k[Y] \to k[X\times Y],\ (f,g) \mapsto \varphi(f,g),$$

definiert, die offensichtlich k-bilinear ist. Sie induziert einen k-Algebra-Homomorphismus

$$k[X] \otimes k[Y] \to k[X\times Y],\ f\otimes g \mapsto \varphi(f,g)\ .$$

Da jede reguläre Funktion auf $X\times Y$ eine Summe von Funktionen der Gestalt $\varphi(f,g)$ ist[29], ist diese Abbildung surjektiv. Wir haben noch zu zeigen, die Abbildung ist injektiv. Seien

$$\{f_i\}$$

eine Familie k-linear unabhängiger Elemente von k[X] und

$$\{g_j\}$$

eine Familie k-linear unabhängiger Elemente von k[Y]. Es reicht zu zeigen, die Familie der Elemente

---

[28] Man kann dies direkt beweisen. Es folgt aber auch unmittelbar aus dem Hilbertschen Nullstellensatz und der Irreduzibilität des Polynoms $T_1T_2 - 1$.

[29] Seien $S_1,...,S_m$ die Koordinaten-Funktionen des $\mathbb{A}^m$ und $T_1,...,T_m$ die des $\mathbb{A}_n$. Für f können wir dann beliebige Potenzprodukte in den S verwenden und für g beliebige Potenzprodukte in den T. Für $\varphi(f,g)$ erhalten wir dann beliebige Potenzprodukte in den S und T. Jedes Polynom in S und T ist aber eine endliche k-Linearkombination solcher Potenzprodukte.

$$\varphi(f_i, g_j)$$

von k[X×Y] ist k-linear unabhängig. Sei also

$$0 = \sum_{i,j} c_{ij}\ \varphi(f_i, g_j),\ c_{ij} \in k.$$

Dann gilt für beliebige $x \in X$, $y \in Y$,

$$0 = \sum_{i,j} c_{ij}\ f_i(x) g_j(y).$$

Für jedes fest gewählte x steht rechts eine Linearkombination der linear unabhängigen Funktionen g_j, die identisch Null ist auf Y. Also müssen die Koeffizienten Null sein:

$$0 = \sum_i c_{ij} f_i(x)$$

für jedes $x \in X$. Da die f_i linear unabhängig sind, müssen alle c_{ij} Null sein.

QED.

(g) Hilbertscher Nullstellensatz für die Koordinatenringe

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine abgeschlossenen Teilmenge und

$$f_1,\dots,f_r,g \in k[X]$$

reguläre Funktionen auf X mit der Eigenschaft, daß

$$g(x) = 0$$

gilt für jeden Punkt $x \in X$ mit $f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0$. Dann ist eine Potenz von g eine Linearkombination der f_i ,

$$g^s \in (f_1,\dots,f_r).$$

Beweis. Seien $F_1,\dots,F_r,G$ Polynome, welche die regulären Funktionen $f_1,\dots,f_r,g$ repräsentieren. Weiter sei

$$X = V(H_1,\dots,H_s).$$

Nach Voraussetzung ist dann G gleich Null in allen Punkten von

$$V(H_1,\dots,H_s, F_1,\dots,F_r).$$

Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz 5.2.1(i) gibt es einen Exponenten t mit

$$G^t = (H_1,\dots,H_s, F_1,\dots,F_r).$$

Wir schreiben G^t als Linearkombination der H_i und F_j und schränken diese Relation auf X ein. Die H_i gehen dabei in die Null über, die F_j in die f_j und G in g. Wir erhalten also eine Darstellung von g^t als Linearkombination der f_j .

QED.

(h) Zur Relation zwischen den abgeschlossenen Mengen und deren Idealen

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossene Teilmengen. Dann sind äquivalent:

(i) $X \subseteq Y$

(ii) $I(X) \supseteq I(Y)$.

Beweis. (i) ⇒ (ii). Es gelte (i). Jede Funktion, die auf auch ganz Y Null ist, ist dann auch auf ganz X Null.

(ii) ⇒ (i). Es gelte (ii). Da die definierenden Gleichungen von Y auf Y identisch Null sind, liegen sie in I(Y), also auch in I(X). Wir haben gezeigt, die definierenden Gleichungen von Y sind identisch Null auf X. Dann gilt aber (i).
QED.

(i) Zur Relation zwischen definierenden Gleichungen und den Idealen I(X)

1. Jedes Erzeugendensystem von I(X) bildet ein System definierender Gleichungen für X.

2. Nicht jedes System definierender Gleichungen für X muß I(X) erzeugen (man ersetze die definierenden Gleichungen durch deren Quadrate)[30].

3. Als System definierender Gleichungen kann man stets ein Ideal wählen:

$$V(M) = V(\text{von } M \text{ erzeugtes Ideal})$$

4. Für ein Ideal $I \subseteq k[T]$ und eine abgeschlossene Menge $X \subseteq A^n$ gilt:

$$V(I) = X \Leftrightarrow \sqrt{I} = I(X).$$

Dabei bezeichne $\sqrt{I}$ das Ideal

$$\sqrt{I} = \{f\in k[T] \mid \text{eine Potenz von } f \text{ liegt in } I\},$$

welches auch Radikal von I heißt.

Beweis von 4. ⇒. Sei $f\in\sqrt{I}$. Dann gilt $f^n\in I$, also $f^n = 0$ auf X, also f = 0 auf X, also $f\in I(X)$. Wir haben gezeigt:

$$\sqrt{I} \subseteq I(X).$$

Sei jetzt $f\in I(X)$. Dann gilt f = 0 auf X, also f = 0 auf V(I). Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist eine Potenz f^n eine Linearkombination eines Erzeugendensystems von I, d.h.

$$f^n \in I.$$

Mit anderen Worten, es gilt $f \in \sqrt{I}$. Wir haben gezeigt, aus V(I) = X folgt $\sqrt{I} = I(X)$.

⇐. Mit $\sqrt{I} = I(X)$ gilt

$$X = V(I(X)) = V(\sqrt{I}\,) = V(I).$$

QED.

(j) Einpunktige Mengen und maximale Ideale

1. Jede einpunktige Menge $X = \{(a_1,...,a_n)\}$ ist abgeschlossen und deren Ideal ist das maximale Ideal

$$I(X) = (T_1\text{-}a_1, \dots , T_n\text{-}a_n)$$

(nach 5.2.2(c)).

2. Jedes maximale Ideal $m \subseteq k[T]$ ist das Ideal einer einpunktigen Menge, also insbesondere von der in 1. beschriebenen Gestalt.

Beweis von 2. Sei X = V(m). Wäre X leer, so wäre die Funktion f = 1 Null in jedem Punkt von V(m). Nach dem Nullstellensatz ist dann eine Potenz von 1 Linearkombination eines Erzeugendensystems von m,

$$1 \in m.$$

---

[30] Zum Beispiel ist $V(T_1) = V(T_1^2)$ aber $(T_1) \neq (T_1^2)$.

Das widerspricht aber der Definition des maximalen Ideals. Es gibt also einen Punkt

$$x \in X = V(m).$$

Alle Funktion aus m sind dann Null in x, d.h. es gilt

$$m \subseteq I(\{x\}) = \text{echtes Ideal von } k[T].$$

Weil m maximales Ideal ist, folgt

$$m = I(\{x\}).$$

QED.

5.2.3 Reguläre Abbildungen

(a) Definition (reguläre Abbildung)

Seien $X \subseteq A^m$ und $Y \subseteq A^n$ abgeschlossene Mengen. Eine Abbildung

$$f: X \to Y, x \mapsto (f_1(x), \dots , f_n(x)),$$

heißt regulär, wenn ihre Koordinatenfunktionen f_i reguläre Funktionen sind,

$$f_i \in k[X].$$

Eine reguläre Funktion $X \to Y$ ist also durch ein Tupel von Elementen aus $k[X]$ gegeben, die den Gleichungen von Y genügen.

(b) Beispiel (reguläre Funktionen sind reguläre Abbildungen)

Jede reguläre Funktion auf X läßt sich als reguläre Abbildung $X \to \mathbb{A}^1$ auffassen.

(c) Beispiel (lineare Transformationen)

Lineare Abbbildungen lassen sich als reguläre Abbildungen $\mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$ auffassen.

(d) Beispiel (Projektionen)

Die Abbildung

$$V(T_1T_2\text{-}1) \subseteq A^2 \to A^1 , (x,y) \mapsto x,$$

ist regulär.

Allgemeiner seien

$$X := V(f_1,\dots,f_m) \subseteq \mathbb{A}^n$$

eine abgeschlossene Teilmenge und $f \in k[T]$ ein beliebiges Polynom. Wir führen eine weitere Unbestimmte T_{n+1} ein und setzen

$$X' := V(f_1,\dots,f_m , T_{n+1}\cdot f - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}.$$

Dann ist die Abbildung

$$X' \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \to X, (x_1,\dots,x_{n+1}) \mapsto (x_1,\dots,x_n),$$

wohldefiniert und regulär.

(e) Beispiel (Parametrisierung der semi-kubischen Parabel)

Die Abbildung

$$\mathbb{A}^1 \to V(T_2^2\text{-}T_1^3), t \mapsto (t^2,t^3),$$

ist regulär.

(f) Beispiel (Frobenius-Abbildung)

Sei der Grundkörper k von der Charakteristik $p > 0$,

$$\mathbb{F}_p \subseteq k.$$

Weiter sei $X = V(f_1,...,f_m) \subseteq \mathbb{A}^n$ eine abgeschlossene Menge, deren definierende Gleichungen Koeffizienten aus $\mathbb{F}_p$ haben,

$$f_1,...,f_m \in \mathbb{F}_p[T].$$

Dann ist die Abbildung

$$F: X \to X, (x_1,...,x_n) \mapsto (x_1^p,...,x_n^p),$$

wohldefiniert und regulär und heißt Frobenius-Morphismus oder auch Frobenius-Abbildung. Man beachte, wegen der Annahme über die Koeffizienten der f_i gilt

$$f_i(x_1^p,...,x_n^p) = f_i(x_1,...,x_n)^p,$$

d.h. F überführt tatsächlich die Punkte von X in Punkte von X. Die Punkte von X, deren Koordinaten in $\mathbb{F}_p$ liegen, sind gerade durch die Bedingung charakterisiert, daß sie Fixpunkte des Frobenius-Morphismus F sind.

(g) Die induzierte Abbildung auf den Koordinatenringen

1. Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung und $\alpha \in k[Y]$ eine reguläre Funktion auf Y. Dann ist,
$$f^*(\alpha) := \alpha\circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha} k, x \mapsto f(x) \mapsto \alpha(f(x)),$$
ein reguläre Abbildung auf X. Sie heißt Verpflanzung von α entlang f oder auch inverses Bild von α by f.
2. Die Abbildung
$$f^*: k[Y] \to k[X], \alpha \text{ a } f^*(\alpha) = \alpha\circ f,$$
ist ein k-Algebra-Homomorphismus.
3. Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ zwei reguläre Abbildungen, so gilt
$$(g\circ f)^*(\alpha) = f^*(g^*(\alpha))$$
für jedes $\alpha \in k[Z]$, d.h. es ist
$$(g\circ f)^* = f^*\circ g^*.$$
4. Trivialerweise gilt $(id)^*\alpha = \alpha$, d.h.
$$id^* = id.$$

(g) Isomorphie abgeschlossener Mengen

Eine reguläre Abbildung $f: X \to Y$ heißt Isomorphismus, wenn es eine reguläre Abbildung $g: Y \to X$ gibt, mit

$$f\circ g = id_Y \text{ und } g\circ f = id_X.$$

Falls ein solcher Isomorphismus existiert, so sagt man, die abgeschlossenen Mengen X und Y sind isomorph.

Satz

Zwei abgeschlossene Mengen sind genau dann isomorph, wenn ihre Koordinatenringe isomorph sind über k.

Beweis. Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$ zueinander inverse reguläre Abbildungen. Wir betrachten die Verpflanzungsabbildungen

$$f^*: k[Y] \to k[X] \text{ und } g^*: k[X] \to k[Y].$$

Es gilt

$$f^*\circ g^* = (g\circ f)^* = id^* = id$$

$$g^*\circ f^* = (f\circ g)^* = id^* = id,$$

d.h. f* und g* sind zueinander inverse k-Algebra-Homomorphismen.
Sei jetzt umgekehrt ein k-Algebra-Isomorphismus

$$h: k[X] \to k[Y]$$

gegeben. Wir nehmen an,

$$X \subseteq \mathbb{A}^m \text{ und } Y \subseteq \mathbb{A}^n$$

Wir bezeichnen die Einschränkung der i-ten Koordinatenfunktion $\mathbb{A}^m \to k$ auf X mit x_i und die Einschränkung der j-ten Koordinatenfunktion $\mathbb{A}^n \to k$ auf Y mit y_j. Es gilt dann

$$k[X] = k[x_1,...,x_m]$$
$$k[Y] = k[y_1,..., y_n]$$

Wir führen diefolgenden Bezeichnungen ein.

$$f_i := h(y_i) \in k[X]$$
$$g_j := h^{-1}(x_j) \in k[Y]$$

Dann sind

$$f: X \to Y, x \mapsto (f_1(x),...,f_n(x)),$$
$$g: Y \to X, y \mapsto (g_1(y),...,g_n(y)),$$

wohldefinierte zueinander inverse reguläre Abbildungen (die auf den Koordinatenringen gerade den Isomorphismus h und bzw. dessen Umkehrung induzieren).
QED.
Bemerkung
Die obigen Argumente zeigen im wesentlichen, der kontravariante Funktor

(abgeschlossene Mengen) $\to$ (kommutative k-Algebren mit 1),X $\mapsto$ k[X],

ist eine Äquivalenz der linken Kategorie mit einer Teilkategorie der rechten. Die moderne algebraischen Geometrie unterscheidet sich von der klassischen im Grunde dadurch, daß sie die linke Kategorie soweit vergrößert, daß man ein Äquivalenz mit der vollen Kategorie rechts erhält (und außerdem noch den Körper k durch einen beliebigen kommutativen Ring ersetzt).

(h) Beispiel
Die Parabel

$$X: y - x^k = 0$$

ist isomorph zur affinen Geraden. Als zueinander inverse Isomorphismen kann man die folgenden verwenden.

$$X \to \mathbb{A}^1, (x,y) \mapsto x,$$
$$\mathbb{A}^1 \to X, \quad x \mapsto (x,x^k).$$

(i) Beispiel
Betrachten wir die Hyperbel

$$X: xy - 1 = 0$$

und die reguläre Abbildung

$$X \to \mathbb{A}^1, (x,y) \mapsto x.$$

Dies ist kein Isomorphismus, denn der Ursprung des $\mathbb{A}^1$ liegt nicht im Bild.

(j) Beispiel
Betrachten wir die semi-kubische Parabel

$$X: x^3 - y^2 = 0$$

und die Abbildungen

$$\mathbb{A}^1 \to X,\ t \mapsto (t^2, t^3),$$

$$X \to \mathbb{A}^1,\ (x,y) \mapsto \frac{y}{x},\ (0,0) \mapsto 0.$$

Diese Abbildungen sind zueinander invers. Es sind jedoch keine Isomorphismen, denn die zweite Abbildung ist nicht regulär.

Aufgabe: Zeigen Sie, es gibt keinen Isomorphismus, indem Sie beweisen, die Koordinatenringe sind nicht isomorph.

(k) Reduktion auf die Diagonale

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ zwei abgeschlossene Mengen. Betrachten wir das direkte Produkt

$$X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{2n}.$$

Im $\mathbb{A}^{2n}$ bezeichnen wir die Koordinatenfunktionen mit $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ und betrachten noch die abgeschlossene Menge

$$\Delta := V(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n) \subseteq \mathbb{A}^{2n}$$

welche Diagonale heißt.. Dann ist die Abbildung

$$X \cap Y \to (X \times Y) \cap \Delta,\ z \mapsto (z,z),$$

wohldefiniert und regulär. Es ist leicht zu sehen, daß es sich sogar um einen Isormophismus (mit der Inversen $(z,z) \mapsto z$) handelt.

Diese Abbildung gestattet es oft, Fragen der Schnitt-Theorie auf den Fall zurückzuführen, daß eine der Mengen die Diagonale ist.

(l) Dominante reguläre Abbildungen

Ein reguläre Abbildung $f: X \to Y$ heißt dominant, wenn die induzierte Abbildung

$$f^*: k[Y] \to k[X]$$

injektiv ist.

Aufgabe: Zeigen Sie, f ist genau dann dominant, wenn das Bild f(X) dicht liegt in Y, d.h. wenn $\overline{f(X)} = Y$ gilt.

5.3 Rationale Funktionen

5.3.1 Irreduzible Mengen

(a) Definition (irreduzible abgeschlossene Menge)
Eine abgeschlossene Menge X heißt reduzibel, wenn es echte abgeschlossene Teilmengen

$$X' \subset X,\ X'' \subset X$$

gibt mit $X = X' \cup X''$. Andernfalls heißt X irreduzibel.

(b) Theorem 1

Jede abgeschlossene Menge ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler.
Beweis. Angenommen, die Aussage ist falsch für die abgeschlossene Menge X. Dann gibt es echte abgeschlossene Teilmengen X_1 und X'_1 mit

$$X = X_1 \cup X'_1.$$

Für eine dieser Teilmengen muß die Aussage des Theorems ebenfalls falsch sein, sonst wäre sie für X nicht falsch, sagen wir für X_1. Es gibt also eine echte Teilmenge X_1 von X, für die die Aussage des Satzes ebenfalls falsch ist. Wir wiederholen die Argumentation und erhalten eine echt absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset ...,$$

für die die Behauptung falsch ist. Für die Folge der zugehörigen Ideal besteht die umgekehrte Inklusion,

(1) $$I(X) \subset I(X_1) \subset I(X_2) \subset ...,$$

Zunächst gilt nur '$\subseteq$'. Aus den Idealen kann man aber durch Übergang zu den Nullstellenmengen, die X_i wiedergewinnen,

$$V(I(X_i)) = X_i ,$$

d.h. die Inklusionen müssen echt sein.
Eine unendliche aufsteigende Kette (1) von aufsteigenden Idealen in k[T] ist ber nicht möglich, da Polynomringe Noethersch sind.
QED.

(b) Charakterisierung der Irreduzibilität

Für eine abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq A^n$ sind äquivalent.
(i) X ist irreduzibel.
(ii) k[X] ist nullteilerfrei.
(iii) I(X) ist ein Primideal.

Beweis. (ii)$\Leftrightarrow$ (iii). Gilt wegen k[X] = k[T]/I(X).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen, X wäre nicht irreduzibel,

$$X = X' \cup X''. \qquad (1)$$

Da alle beteiligten Mengen durch Polynome definiert sind, gibt es dann ein Polynom, das auf X' identisch Null ist, aber nicht auf X",

$$f' \in I(X') - I(X''),$$

und analog ein

$$f'' \in I(X'') - I(X').$$

Dann sind f' und f" erst recht nicht auf ganz X identisch Null,

$$f', f'' \notin I(X).$$

Nach Konstruktion ist es aber ihr Produkt,

$$f' \cdot f'' \in I(X)$$

im Widerspruch zur Annahme (iii).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Angenommen, k[X] besitzt Nullteiler. Dann gibt es Polynome $f,g \in k[T]$, deren Einschränkung auf X nicht Null ist, wohl aber die Einschränkung des Produkts,

$$X \not\subseteq V(f)$$
$$X \not\subseteq V(g)$$
$$X \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g).$$

Wir setzen

$$X' := X \cap V(f)$$
$$X'' := X \cap V(g)$$

Dann sind X' und X" echte Teilmengen von X mit $X'\cup X" = X$, im Widerspruch zur Annahme (i).
QED.

(c) Theorem 3
Das direkte Produkt irreduzibler abgeschlossener Menge ist irreduzibel.
Beweis. Seien X und Y irreduzibel. Angenommen $X\times Y$ ist es nicht,

$$X\times Y = Z'\cup Z" . \tag{1}$$

Dann ist für jedes $x\in X$ die Menge $\{x\}\times Y$ isomorph zu Y also irreduzibel. Wegen (1) gilt

$$\{x\}\times Y = (\{x\}\times Y\cap Z') \cup (\{x\}\times Y\cap Z")$$

und wegen der Irreduzibilität muß $\{x\}\times Y$ ganz in einer der beiden Mengen rechts liegen, d.h. es gilt

$$\{x\}\times Y \subseteq Z' \text{ oder } \{x\}\times Y \subseteq Z".$$

Wir setzen

$$X' := \{x\in X \mid \{x\}\times Y \subseteq Z' \}$$

$$X" := \{x\in X \mid \{x\}\times Y \subseteq Z" \}$$

Nach Konstruktion gilt

$$X = X'\cup X".$$

Es reicht zu zeigen, die Mengen X' und X" sind abgeschlossen, denn dies ergibt den gewünschten Widerspruch zur Irreduzibilität von X.
Abgeschlossenheit von X'. Für jedes $y\in Y$ betrachten wir die Menge

$$X_y := \{x \in X \mid (x,y)\in Z'\}$$

Es gilt

$$X_y \times \{y\} = X\times\{y\}\cap Z'.$$

Deshalb ist $X_y \times \{y\}$ abgeschlossen, d.h. durch Polynome definiert. Dann gilt aber dasselbe für X_y, d.h. auch X_y ist abgeschlossen[31]. Wegen

$$X' = \cap_{y\in Y} X_y$$

Ist damit auch X' abgeschlossen.
Die Abgeschlossenheit von X" ergiebt sich aus Symmetriegründen.
QED.

5.3.2 Rationale Funktionen

(a) Definition (rationale Funktion auf einer irreduziblen abgeschlossenen Menge)

Sei X eine irreduzible abgeschlossene Menge im A^n. Dann heißt der Quotientenkörper des Integritätbereiches k[X] auch Körper der rationalen Funktionen von X und wird mit

$$k(X) := Q(k[X])$$

bezeichnet. Seine Elemente heißen rationale Funktionen auf X. Dies sind Quotienten

$$r = \frac{f}{g} \text{ mit } f,g\in k[X],\ g \ne 0.$$

Wir schreiben im folgenden

---

[31] Sind $(f_i(T',T"))$ definierende Gleichungen für $X_y \times \{y\}$, so bilden die $f_i(T',y)$ definierende Gleichungen für X_y.

$$r = \frac{f}{g} \text{ auf X mit Polynomen } f,g \in k[T],\ g \notin I(X).$$

Dabei sind zwei solche Brüche

$$r' = \frac{f'}{g'} \text{ und } r'' = \frac{f''}{g''}$$

genau dann als gleich auf X anzusehen, wenn gilt

$$r' = r'' \text{ auf X} \Leftrightarrow f'\cdot g'' = f''\cdot g' \text{ auf X} \Leftrightarrow f'\cdot g'' - f''\cdot g' \in I(X).$$

Bemerkung

Dies ist die Äquivalenzrelation die wir für die Beschreibung des Funktionenkörpers in 5.1.7 bereits verwendet haben.

(b) k(X) als Faktorring

$$\mathcal{O}_X :=^{32} \{\frac{f}{g} \mid f,g \in k[T] \mid g \notin I(X)\} = k[X]_{I(X)}$$

$$m_X := \{\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_X \mid f|_X = 0\} = \{\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_X \mid f \in I(X)\} = I(X)\cdot\mathcal{O}_X$$

Es gilt dann

$$k(X) := O_X/m_X .$$

(c) Reguläre Punkte rationaler Funktionen

Eine rationale Funktion $\varphi \in k(X)$ heißt <u>regulär</u> im Punkt $x \in X$, wenn man sie in der folgenden Gestalt schreiben kann.

$$\varphi = \frac{f}{g} \text{ mit } f,g \in k[X] \text{ und } g(x) \neq 0.$$

Man sagt auch, die rationale Funktion φ ist in diesem Punkt <u>definiert</u>. In dieser Situation schreibt man auch

$$\varphi(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \ (\in k)$$

und nennt dieses Element <u>Wert</u> von φ im Punkt x.

(d) Theorem 4: rationale Funktionen, die in allen Punkten regulär sind, sind polynomial

Eine rationale Funktion $\varphi \in k(X)$, die in allen Punkten von X regulär ist, ist eine reguläre Funktion, d.h. $\varphi \in k[X]$.

Beweis. Für jedes $x \in X$ wählen wir Funktionen $f_x, g_x \in k[X]$ mit

$$\varphi = \frac{f_x}{g_x} \text{ auf X und } g_x(x) \neq 0.$$

Sei I das von allen g_x erzeugte Ideal,

$$I := (g_x \mid x \in X)k[X].$$

Als Faktorring des Noetherschen Rings k[T] ist auch k[X] Noethersch, d.h. I besitzt ein endliches Erzeugendensystem,

$$I = (g_{x_1}, \dots, g_{x_N}).$$

[32] Genauer müßte man $O_{A^n,X}$ schreiben für den lokalen Ring des A^n im Punkt X.

Die Funktionen g_{x_i} können keine gemeinsame Nullstelle (auf X) haben, denn wäre x eine solche, so müßte $g_x \in I = (g_{x_1}, \dots, g_{x_N})$ als Linearkombination der g_{x_i} in x Null sein - im Widerspruch zur Wahl von g_x. Die gemeinsame Nullstellenmenge der g_{x_i} ist somit leer. Nach dem Nullstellensatz für k[X] ist damit

$$1 \in I,$$

d.h. es gilt

$$1 = u_1 g_{x_1} + \dots + u_N g_{x_N}$$

mit gewissen $u_i \in k[X]$. Durch Multiplikation der Identität mit φ erhalten wir wegen $\varphi = \frac{f_{x_i}}{g_{x_i}}$, d.h. wegen $\varphi \cdot g_{x_i} = f_{x_i}$:

$$\varphi = u_1 f_{x_1} + \dots + u_N f_{x_N} \in k[X]$$

Mit anderen Worten, φ ist regulär.
QED.

(e) Zum Definitionsbereich rationaler Funktionen, Irreduziblität und Durchschnitte offener Mengen

(i) Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion $r = \frac{f}{g} \in k(X)$ ist eine nicht-leere offene Menge.[33]

(ii) Der gemeinsame Definitionsbereich von endlich vielen rationalen Funktionen ist ebenfalls offen und nicht leer.[34]

Allgemeiner gilt sogar:

(iii) Der Durchschnitt von endlich vielen nicht-leeren offenen Teilmengen $U_1, \dots, U_n$ einer irreduziblen abgeschlossenen Menge X ist nicht leer.

Nützliche Tatsache:

(iv) Jede offene Menge $U \subseteq X$ ist Vereinigung offener Hauptmengen, d.h. von offenen Mengen der Gestalt

$$D(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

(v) Zwei rationale Funktionen $r' = \frac{f'}{g'}$ und $r'' = \frac{f''}{g''}$, die auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge ihres gemeinsamen Definitionsbereichs übereinstimmen, sind gleich als Elemente von k(X) und damit gleich in allen Punkten ihres gemeinsamen Definitionsbereiches.

---

[33] Sie ist nicht-leer, weil g nicht identisch Null ist auf X, also $D(g) = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$ im Definitionsbereicht liegt. Sie ist offen, weil mit $g(x) \neq 0$ die analoge Ungleichung auch in einer ganzen Umgebung von x besteht.

[34] Das Produkt der Nenner der rationalen Funktionen ist eine von Null verschieden Funktion g von k[X]. Die zugehörige Menge D(g) liegt im Definitionsbereich aller betrachteten rationalen Funktionen. Die Offenheit ist klar.

Beweis von (iii). Angenommen der Durchschnitt der U_i ist leer. Wir setzen

$$X_i = X - U_i .$$

Dann gilt

$$X = \cup X_i.$$

Weil X irreduzibel ist, gilt $X \subseteq X_i$ für mindestens ein i, d. $X = X_i$. Dann ist aber $U_i = \emptyset$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Beweis von (iv). Sei $x \in U$. Dann ist X-U eine abgeschlossene Menge, die den Punkt x nicht enthält. Also gibt es ein Polynom $p \in k[T]$ mit

$$p = 0 \text{ auf } X\text{-}U \text{ aber } p(x) \neq 0.$$

Mit $f := p|_X$ gilt die analoge Aussage für f, d.h.

$$D(f) \subseteq U \text{ und } f(x) \neq 0,$$

d.h. $x \in D(f) \subseteq U$.

Beweis von (v). Sei U eine nicht-leere offene Teilmenge im gemeinsamen Definitionsbereich von r' und r''. Dann gilt

(1) $$f'(x)g''(x) - f''(x)g'(x) = 0 \text{ für alle } x \in U.$$

O.B.d.A. sei U eine offene Hauptmenge,

$$U = D(h).$$

Dann ist h in allen Punkten Null, in denen die linke Seiten von (1) eventuell nicht Null ist, d.h.

$$f'g''h^2 - f''g'h^2 = 0 \text{ auf } X,$$

also

$$\frac{f'}{g'} = \frac{f'h}{g'h} = \frac{f''h}{g''h} = \frac{f''}{g''} \text{ in } k(X).$$

Seien jetzt

$$\frac{f'}{g'} = \frac{f''}{g''} \text{ in } k(X)$$

und ein $x \in X$ ein Punkt ihres gemeinsamen Definitionsbereiches. Wir können annehmen, f',g',f'',g'' sind Polynome mit $g'(x) \neq 0$ und $g''(x) \neq 0$. Nach Definition von k(X) bedeutet die Gleichheit in k(X),

$$f'\cdot g'' - f''\cdot g' \in I(X).$$

Wegen $x \in X$ folgt,

$$f'(x)\cdot g''(x) - f''(x)\cdot g'(x) = 0,$$

also

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

QED.

5.3.3 Rationale Abbildungen

(a) Rationale Abbildungen mit Werten im affinen Raum

Sei $X \subseteq A^m$ eine irreduzible abgeschlossene Menge. Eine rationale Abbildung[35]

$$X \dashrightarrow A^n,\ x \mapsto (\varphi_1(x),\ldots,\varphi(x)_n),$$

---

[35] Genauer eine rationale Abbildung ist eine Abbildung, deren Definitionsbereich eine offene Teilmenge von X enthält und deren Koordinatenfunktionen rationale Funktione auf X sind.

ist durch ein n-Tupel rationaler Funktionen auf X gegeben,

$$\varphi_i \in k(X).$$

(b) Definition (beliebige rationale Abbildungen)

Seien X, Y irrreduzible abgeschlossene Mengen mit $Y \subseteq A^n$. Eine rationale Abbildung

$$\varphi: X \dashrightarrow Y,\ x \mapsto (\varphi_1(x),...,\varphi(x)_n),$$

ist durch ein n-Tupel rationaler Funktionen φ_i auf X gegeben mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt x des gemeinsamen Definitionsbereiches gilt

(1) $$\varphi(x) := (\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)) \in Y.$$

Liegt x im gemeinsamen Definitionsbereich der φ_i , so sagt man, die Abbildung φ sei <u>regulär</u> im Punkt x.
Die Menge

$$\mathrm{Im}(\varphi) := \{\varphi(x) \mid \varphi \text{ regulär in } x \in X\}$$

heißt <u>Bild</u> oder auch <u>Wertevorrat</u> von φ.

Bemerkungen

(i) Eine rationale Abbildung auf X ist somit eine Abildung, die auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge von X definiert ist.

(ii) Die Betrachtung von Abbildungen und Funktionen, die nicht in allen Punkten definiert sind, ist charakteristisch für die algebraische Geometrie[36].

(iii) Bedingung (1) bedeutet gerade[37], die Koordinatenfunktionen φ_i genügen als Elemente des Körpers k(X) den definierenden Gleichungen von Y.

(c) Die induzierte Abbildung auf den Funktionenkörpern

Sei

$$f: X \dashrightarrow Y,\ x \mapsto (f_1(x),...,f_n(x))$$

eine rationale Abbildung irreduzibler abgeschlossener Mengen. Weiter sei die Abbildung <u>dominant</u>, d.h. ihr Bild liege dicht in Y,

$$\overline{\mathrm{Im}(f)} = Y.$$

Für jede reguläre Funktion $\alpha \in k[Y]$ ist dann

$$\alpha \circ f: X \dashrightarrow k,\ x \mapsto \alpha(f_1(x),...,f_n(x)),$$

eine rationale Funktion[38] auf X. Die so definierte Abbildung

$$f^*: k[Y] \to k(X),\ \alpha \mapsto \alpha(f_1,...,f_n),$$

---

[36] Es werden Funktionenringe (genauer: -körper) betrachtet, für welche der gemeinsame Definitionsbereich aller Funktionen des Rings <u>leer</u> ist.

[37] Bedingung (1) bedeutet, für jede definierende Gleichung f von Y ist die rationale Funktion

$$f(\varphi_1,...,\varphi_n)$$

Null auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge U von X (die von f abhängen kann). Nach 1.3.2(e)(v) gilt dann aber

$$f(\varphi_1,...,\varphi_n) = 0 \text{ in } k(X).$$

Umgekehrt folgt aus letzterem, daß Bedingung (1) erfüllt ist.

[38] Die auftretenden Nenner sind Potenzprodukte der Nenner der f_i, also Funktionen, die nicht identisch Null sind auf X. Weil α ein Polynom ist, tritt das Problem, welches wir bei der analogen Konstruktion im Kurvenfall hatten (vgl. 5.1.8), nicht auf.

ist offensichtlich ein Homomorphismus von k-Algebren. Wir zeigen zunächst:

<u>Behauptung</u>: Der Homormorphismus f* ist injektiv.

Aus $f^*(\alpha) = 0$ folgt, die reguläre Funktion α ist Null auf Im(f). Sei $\alpha = p|_X$ mit einem Polynom p. Dann ist auch p Null auf Im(f), d.h.

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq V(p).$$

Weil V(p) abgeschlossen ist, folgt $\overline{\mathrm{Im}(f)} \subseteq V(p)$, d.h. p ist Null auf $\overline{\mathrm{Im}(f)}$, d.h. α ist Null auf $\overline{\mathrm{Im}(f)}$. Wegen $\overline{\mathrm{Im}(f)} = Y$, folgt α=0 in k[Y].

Die Abbildung f* identifiziert also k[Y] mit einem Teilring des Körpers k(X). Dann läßt sich aber auch der Quotientenkörper von k[Y] mit einem Teilkörper von k(X) identifizieren. Anders ausgedrückt, f* induziert einen k-Homomorphismus

$$f^*: k(Y) \to k(X),\ \alpha \mapsto \alpha(f_1,...,f_n),$$

der ebenfalls mit f* bezeichnet wird. Diese Abbildung heißt wie im Fall der regulären Abbildungen <u>Verpflanzung</u> entlang f oder auch <u>inverses Bild</u> ng f. Wie im Fall regulärer Abbildungen gilt

$$(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$$

für je zwei rationale dominante Abbildungen $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$. Trivialerweise gilt

$$Id^* = Id.$$

(d) Definition: Birationale Isomorphie

Eine rationale Abbildung

$$f: X\to Y$$

von irreduziblen abgeschlossenen Mengen heißt <u>birationaler Isomorphismus</u>, wenn es eine Inverse gibt, d.h. eine rationale Abbildung

$$g: Y \to X$$

mit $f\circ g = Id_Y$ und $g\circ f = Id_X$.

Zwei irreduzible abgeschlossene Mengen X und Y heißen <u>birational isomorph</u>, wenn es einen birationalen Isomorphismus $f: X\to Y$ gibt.

Eine irreduzible abgeschlossene Menge X heißt <u>rational</u>, wenn sie birational isomorph zu einem A^n ist.

Satz

Zwei irreduzible abgeschlossene Mengen sind genau dann birational isomorph, wenn ihre rationalen Funktionenkörper isomorph sind über k.

Beweis: formal derselbe wie der des Satzes von 5.2.3(g).

(e) Beispiel (Hyperflächen zweiten Grades)

Eine Hyperfläche

$$X: f(T_1,...,T_n) = 0$$

zweiten Grades im A^n ist rational. Der Beweis ist derselbe wie im Fall zweier Variabler.

Man projeziert die Hyperfläche aus einem Punkt $x\in X$ auf eine Hyperebene, die nicht durch x geht.

Wichtig: damit die Projektionsstrahlen durch x die Hyperfläche ein zweites Mal schneiden, darf x kein singulärer Punkt von X sein (z.B. nicht die Spitze eines Kegels), d.h. es muß gelten

$$\frac{\partial f(x)}{\partial T_i} \neq 0 \text{ für mindestens ein i.}$$

(f) Beispiel (rationale Fläche 3.Grades)

Wir betrachten die Fläche A^3

$$X: x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Auf dieser liegen verschiedene Geraden, zum Beispiel

$g_1 := V(x+y, z-1)$

$g_2 := V(x+\rho y, z-\rho)$

Dabei bezeichne ρ eine dritte Einheitswurzel. Diese Geraden liegen auf keiner gemeinsamen Ebene[39]. Wir beschreiben jetzt die Konstruktion eines birationalen Isomorphismus

$$X \to A^2$$

in geometrischer Weise und ersparen uns die Details.

Wir fixieren eine Ebene $E \subseteq A^3$ mit

$$g_1 \not\subseteq E \text{ und } g_2 \not\subseteq E .$$

Für jeden Punkt

$$x \in X - (g_1 \cup g_2)$$

gibt es genau eine Gerade ℓ durch x, welche die Geraden g_1 und g_2 schneidet[40]. Den Schnittpunkt von ℓ mit der Ebene E bezeichnen wir mit f(x). Die Abbildung

$$X \dashrightarrow E, x \mapsto f(x),$$

ist der gesuchte birationale Isomorphismus[41].

(g) Theorem 5: Charakterisierung der Ringe k[X] bzw. Körper k(X)

(i) Eine k-Algebra A ist genau dann von der Gestalt k[X] mit einer irreduziblen abgeschlossenen Menge, wenn sie endlich erzeugt und nullteilerfrei ist.

---

[39] Für die Gleichung f der Ebene müßte nach dem Nullstellensatz gelten

$f \in (x+y, z-1)$ und $f \in (x+\rho y, z-\rho)$,

denn die beiden Ideale sind Primideale (die Geraden sind irreduzibel, k[T] ist nullteilerfrei). Es folgt

$$f = \alpha\cdot(x+y) + \beta\cdot(z-1) = \gamma\cdot(x+\rho y) + \delta\cdot(z-\rho)$$

mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Das zweite Gleichheitszeichen liefert ein lineares homogenes Gleichungssystem(Koeffizienten-Vergleich für x, y, z und 1 liefert 4 Gleichungen in den 4 Unbestimmten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\delta \\ 0 & -1 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

Nach Vertauschen der beiden mittleren Spalten zerfällt die Matrix in 2×2-Blöcke mit von Null verschiedener Determinante. Es gibt also nur die triviale Lösung und damit keine Ebene, die die Geraden enthält.

[40] x und g_i definieren eine Ebene. Die Schnittgerade der beiden Ebenen ist die gesuchte Gerade ℓ.

[41] Zur Umkehrabbildung. Für $y \in E-(g_1 \cup g_2)$ gibt es genau eine Gerade ℓ durch y, die beide g_i schneidet. Da die g_i ganz auf X liegen, sind die Schnittpunkte von ℓ mit den g_i Punkte von X. Der dritte weitere Schnittpunkt ist dann $f^{-1}(y)$.

(ii) Ein Oberkörper K von k ist genau dann von der Gestalt k(X), wenn er endlich erzeugt ist.

Beweis. Zu (i). Sei A endlich erzeugt über k und nullteilerfrei,

$$A = k[x_1,...,x_n].$$

Wir betrachten den natürlichen Homomorphismus von k-Algebren

$$\varphi:k[T] \to k[x_1,...,x_n],\ T_i \text{ a } x_i\ ,$$

und bezeichnen dessen Kern mit

$$I := \mathrm{Ker}\,(\varphi).$$

Da Polynomringe Noethersch sind, gilt

$$I = (f_1,...,f_m) \text{ mit } f_i.$$

Wir setzen

$$X := V(f_1,...,f_m).$$

Dann gilt

$$I(X) = \sqrt{I} = I$$

Das zweite Gleichheitszeichen besteht, weil I ein Primideal ist, denn nach Konstruktion gilt

$$k[T]/I = A$$

und A ist nullteilerfrei. Damit ist

$$k[X] = k[T]/I(X) = k[T]/I = A.$$

Die umgekehrte Implikation ist trivial.

Zu (ii). Die eine Richtung ist trivial, die andere folgt aus (i).

QED.

(h) Theorem 6: Birationale Isomorphie zu den Hyperflächen

Jede irreduzible abgeschlossene Menge ist birational isomorph zu einer Hyperfläche.

Beweis. Sei X irreduzible abgeschlossene Menge. Dann ist k(X) endlich erzeugt, sagen wir

$$k(X) = k(t_1,...,t_n)$$

Sei d die maximale Anzahl algebraisch unabhängiger Elemente unter den t_i (über k). Wir können dann annehmen

$$t_1,...,t_d \text{ sind algebraisch unabhängig über k.}$$

Jedes Element $y\in k(X)$ ist dann algebraisch über $k(t_1,...,t_d)$, d.h. es genügt einer algbraischen Gleichung mit Koeffizienten aus $k(t_1,...,t_d)$, d.h. es gibt ein irreduzibles Polynom

$$f(T_1,...,T_d,T_{d+1})\in k[T_1,...,T_d,T_{d+1}] - \{0\}$$

mit

$$f(t_1,...,t_d,y) = 0.$$

Sei jetzt speziell $y = t_{d+1}$.

Behauptung:

(1) $$\frac{\partial f}{\partial T_i}(T_1,...,T_d,T_{d+1}) \neq 0 \text{ für mindestens ein i.}$$

Andernfalls würde jedes T_i in f nur mit Expontenten vorkommen, die Vielfache der Charakteristik p von k sind. In diesem Fall wäre aber f eine p-te Potenz also nicht irreduzibel.

Sei jetzt i so gewählt, daß (1) gilt. Dann kommt T_i in f wirklich vor und t_i ist algebraisch über $k(t_1,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_{d+1})$. Letzterer Körper hat also denselben Transzendenzgrad wie $k(t_1,...,t_{d+1})$ und damit wie $k(t_1,...,t_d)$. Mit anderen Worten, die Elemente

$$t_1,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_{d+1}$$

bilden eine Transzendenzbasis von k(X) über k.
Mit anderen Worten, wir können durch umnummerieren der t_i immer erreichen, daß t_{d+1} algebraisch und separabel über $k(t_1,...,t_d)$ ist. Die algebraische Erweiterung

$$k(t_1,...,t_{d+2})$$

entsteht also aus $k(t_1,...,t_d)$ durch hinzufügen eines separabel algebraischen Elements und anschließend eines algebraischen Elements. Nach dem Satz vom primitiven Element ist die Erweiterung einfach, d.h.

$$k(t_1,...,t_d,t_{d+1},t_{d+2}) = k(t_1,...,t_d,y) \text{ mit } y\in k(X).$$

Wir haben damit gezeigt, wir können die Anzahl der Erzeugenden des Körpers k(X) verkleinern, solange diese > d+1 ist. Mit anderen Worten, k(X) wird von d+1 Elementen erzeugt,

$$k(X) = k(t_1,...,t_d,t_{d+1}) \text{ mit } t_1,...,t_d \text{ algebraisch unabhängig.}$$

Letzteres bedeutet,

$$k(X) \cong k(T_1,...,T_d)[T_{d+1}]/(F)$$

mit einem irreduziblen Polynom $F\in k(T_1,...,T_d)[T_{d+1}]$. Indem wir mit einer Einheit von $k(T_1,...,T_d)$ multiplizieren, erreichen wir,

$$F\in k[T_1,...,T_d,T_{d+1}].$$

Da F irreduzibel ist, ist (F) ein Primideal von $k[T_1,...,T_d,T_{d+1}]$ und für die Hyperfläche

$$H = V(F) \subseteq A^{d+1}$$

gilt

$$I(H) = \sqrt{(F)} = (F)$$

Nach Konstruktion gilt damit

$$k[H] = k[T_1,...,T_d,T_{d+1}]/(F)$$

also

$$k(H) = Q(k[H]) = k(T_1,...,T_d)[T_{d+1}]/(F) = k(X).$$

Mit anderen Worten, X ist birational isomorph zur Hyperfläche H.
QED.

(i) Bemerkungen zum Beweis von (h)

(i) Der Beweis zeigt, daß

$$k(X) = k(t_1,...,t_d,t_{d+1})$$

stets eine einfache separabel algebraische Erweiterung des Körpers

$$k(t_1,...,t_d)$$

der rationalen Funktionen in d algebraisch unabhängigen Elementen t_i ist.

(ii) Nach dem Satz vom primitiven Element kann man die im Beweis konstruierten erzeugenden t_i als Linearkombination mit Koeffizienten aus k von den ursprünglichen Erzeugenden schreiben,

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \text{ mit } c_{ij} \in k$$

Die durch diese Formel gegebene lineare Transformation

$$A^n \to A^{d+1}$$

ist eine Projektion des A^n parallel zum linearen Unterraum mit den Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = 0 \quad (i=1,...,d+1).$$

Dies liefert eine geometrische Beschreibung der birationalen Transformation, welche nach Theorem 6 existiert.

5.4 Quasi-projektive Varietäten

5.4.1 Abgeschlossene Mengen im projektiven Raum

(a) Definition: projektiver n-Raum

Den <u>projektiven n-Raum</u> bezeichnen wir mit

$$\mathbb{P}^n := \{[x_0,...,x_n] \mid (x_0,...,x_n) \in k^{n+1} - \{0\}\}$$

Dabei sei

$$[x_0,...,x_n]$$

die Gerade im k^{n+1} durch den Ursprung und den Punkt $(x_0,...,x_n)$, d.h. der vom Vektor $(x_0,...,x_n)$ erzeugte 1-dimensionale Unterraum.

Bezeichnungsweise:

$$[x] := [x_0,...,x_n] \text{ für } x = (x_0,...,x_n)$$

Es gilt dann

$$[x] = [y] \quad \Leftrightarrow \quad x = \lambda \cdot y \text{ für ein } \lambda \in k - \{0\}$$

Die Koordinaten von x heißen dann auch <u>projektive Koordinaten</u> von [x].

(b) Nullstellen von Polynomen

Sei $f \in k[S] := k[S_0,...,S_n]$. Eine <u>Nullstelle</u> von f im $\mathbb{P}^n$ ist ein $p \in \mathbb{P}^n$ derart, daß gilt

$$f(x) = 0 \text{ für alle } x \text{ mit } [x] = p.$$

Wir schreiben dann auch $f(p) = 0$.

(c) Nullstellen und homomgene Komponenten

Sei $f \in k[S] := k[S_0,...,S_n]$ und

$$f = f_0 + f_1 + ... + f_r \text{ mit } f_i \text{ homogen vom Grad i.}$$

Dann heißt f_i <u>homogene Komponente</u> des Grades i von f. Es gilt

$$\begin{aligned} f([x]) = 0 \quad & \Leftrightarrow 0 = f_0(x) + \lambda \cdot f_1(x) + ... + \lambda^r \cdot f_r(x) \text{ für alle } \lambda \in k \\ & \Leftrightarrow f_i(x) = 0 \text{ für alle i} \end{aligned}$$

d.h. f ist genau dann Null in [x], wenn alle homogenen Komponenten von f in x Null sind.

(d) Abgeschlossene Mengen im projektiven Raum

Eine abgeschlossene Menge des $\mathbb{P}^n$ ist definiert als Menge der Gestalt

$$V(M) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in M\}$$

mit $M \subseteq k[S]$ beliebig.

Bemerkungen

(i) Wir können die Polynome von M stets ersetzen durch die Menge der homogenen Komponenten der Elemente von M, ohne daß sich V(M) ändert, d.h. wir können annehmen, M ist eine Menge von homogenen Polynomen.

(ii) Wir können M durch das von M in k[S] erzeugte Ideal ersetzen, ohne daß sich V(M) ändert, d.h. wir können annehmen,

M ist ein von homogenen Polynomen erzeugtes Ideal von k[S].

Ein solches Ideal heißt <u>homogenes Ideal</u> von k[S].

(iii) Da k[S] Noethersch ist, können wir außerdem annehmen, das Ideal von (ii) wird von endlich vielen homogenen Polynomen erzeugt, d.h. eine abgeschlossene Menge von P^n hat stets die Gestalt

$$V(F_1,...,F_m) \text{ mit } F_i \text{ homogen.}$$

(e) Das Ideal einer abgeschlossenen Menge

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann heißt

$$I(X) := \{f \in k[S] \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in X\}$$

Ideal von X.

Bemerkungen

(i) I(X) ist ein Ideal von k[S] mit folgender Eigenschaft:

(*) Mit f liegen auch alle homogenen Komponenten von f in I(X).

(ii) Ideale mit der Eigenschaft (*) heißen <u>homogen</u>.

(iii) Im affinen Fall gilt für abgeschlossene Mengen X = V(I),

$$V(I) = \emptyset \Leftrightarrow 1 \in I.$$

Die analoge Aussage im projektiven Fall ist etwas komplexer. Bezeichne I_s das Ideal

$$I_s := \{f \in k[S] \mid \text{alle homogenen Komponenten des Grades} <s \text{ von f sind Null}\}.$$

Aufgabe: Man zeige, die beiden oben definierten Begriffe der Homogenität stimmen überein.

(f) Der Nullstellensatz im projektiven Fall

Sei $I \subseteq k[S]$ ein homoges Ideal. Dann sind äquivalent:

(i) $V(I) = \emptyset$

(ii) $I_s \subseteq I$ für ein s

Beweis. <u>(ii) ⇒ (i)</u>. Es gilt

$$V(I) \subseteq V(I_s) \subseteq V(S_0^s,\dots,S_n^s) = \emptyset.$$

<u>(i) ⇒ (ii)</u>. Sei $V(I) = \emptyset$. Wir fixieren ein endliches homogenes Erzeugendensystem von I,

$$I = (F_1,...,F_m),\ F_i \text{ homogen.}$$

Dann haben die F_i keine gemeinsame Nullstelle, also auch keine gemeinsame Nullstelle mit der ersten Koordinate 1. Mit anderen Worten, die affine abgeschlossene Menge

$$V(f_1,...,f_m) \subseteq A^n \text{ mit } f_i(T_1,...,T_n) = F_i(1,T_1,...,T_n) = F_i(1,T)$$

ist leer.Nach dem Nullstellensatz folgt

$$1 = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i = \sum_{i=1}^{m} u_i(T)F_i(1,T)$$

mit gewissen Polynomen $u_i \in k[T]$. Wir setzen $T_i = S_i/S_0$ und multiplizieren mit dem Hauptnenner (d.h. einer Potenz von S_0) und erhalten, eine Potenz von S_0 ist Linearkombination der F_i, sagen wir,

$$S_0^m \in I.$$

In analoger Weise erhält man, daß auch Potenzen der anderen Unbestimmten in I liegen. Wir können durch erhöhen der Exponenten einen gemeinsamen Exponenten für alle Unbestimmten finden. O.B.d.A. sei also

$$S_i^m \in I \text{ für } i = 0,...,n.$$

Ein Potenzprodukt der S_i des Grades $\geq m(n+1)$ ist dann mindestens durch eines der S_i^m teilbar und liegt damit in I. Also gilt

$$I_{m(n+1)} \subseteq I.$$

QED.

(g) Zariski-Topologie

Wie im affinen Fall zeigt man, die abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{P}^n$ definieren eine Topologie. Diese heißt Zariski-Topologie des $\mathbb{P}^n$. Die Menge der offenen Mengen wird wieder mit

$$T(\mathbb{P}^n)$$

bezeichnet. Mengen der Gestalt

$$D(F) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid F(x) \neq 0\}$$

mit F homogen heißen offene Hauptmengen. Wie im affinen Fall zeigt man, sie bilden eine Topologie-Basis für die Zariski-Topologie[42].

(h) Überdeckung des P^n durch affine n-Räume

Für jeden Punkt $[x] \in \mathbb{P}^n$ ist mindestens eine projektive Koordinate ungleich Null, d.h.

$$\mathbb{P}^n = D(S_0) \cup D(S_1) \cup ... \cup D(S_n).$$

Jede der offenen Mengen $D(S_i)$ kann man wie folgt mit dem A^n identifizieren.

$$D(S_i) \to A^n,\ [x_0,...,x_n] \mapsto (\frac{x_0}{x_i},..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ... , \frac{x_n}{x_i})$$

Als Umkehrabbildung erhält man

---

[42] Sei $U \subseteq P^n$ offen und $p \in U$ ein Punkt. Dann ist P^n-U eine abgeschlossene Teilmenge des P^n, die den Punkt p nicht enthält. Es gibt also ein homogenes Polynom F mit

$$F(x) = 0 \text{ für alle } x \in P^n\text{-}U \text{ aber } F(p) \neq 0.$$

Dann ist aber $p \in D(F) \subseteq U$.

$$\mathbb{A}^n \to D(S_i)\ ,\ (x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n) \mapsto (x_0,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n).$$

Die Mengen $D(S_i)$ betrachtet man deshalb auch als <u>affine</u> offene Untermengen des P^n.

(i) Überdeckung projektiver abgeschlossener Mengen durch affine

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ abgeschlossen. Dann ist

$$U_i = X \cap D(S_i)$$

eine offene Teilmenge von X und es gilt

$$X = U_0 \cup ... \cup U_n .$$

<u>Behauptung</u>: U_i ist für jedes i abgeschlossene Teilmengen des affines Raums $D(S_i)$.

Beweis. Sei

$$X = V(F_1,...,F_m).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} U_i &= \{[x] \mid F_j(x) = 0 \text{ für alle } j,\ x_i \neq 0\} \\ &= \{[x] \mid F_j(\frac{x}{x_i}) = 0 \text{ für alle } j,\ x_i \neq 0\}. \end{aligned}$$

Wie in (h) identifizieren wir $D(S_i)$ mit dem A^n. Mit

$$f_j(T) := F_j(T_1,...,T_{i-1},1,T_{i+1},...,T_n)$$

gilt dann

$$U_i = \{x \in A^n \mid f_j(x) = 0 \text{ für alle } j\} = V(f_1,...,f_m)$$

QED.

(j) Abschließung affiner abgeschlossener Mengen im projektiven Raum

Sei $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossen, $I \subseteq k[T]$ ein Ideal. Wir identifizieren den A^n mit der offenen Teilmenge

$$\mathbb{A}^n = D(S_0) \subseteq \mathbb{P}^n,\ x \text{ a } [1,x],$$

des projektiven Raums und damit X mit einer Teilmenge des P^n. Sei

$$\bar{X}$$ [43]

die Abschließung von X im P^n. Für $f(T_1,..,T_n) \in I$ ist dann

$$F(S_0,...,S_n) := f(\frac{S_1}{S_0},..., \frac{S_n}{S_0}) \cdot S_0^{\deg f}$$

ein homogenes Polynom, welches in allen Punkten von $X \subseteq P^n$ Null ist. Dieses Polynom heißt <u>Homogenisierung</u> von f. Es gilt

$$X \subseteq V(F \mid f \in I)$$

und damit

$$\bar{X} \subseteq V(F \mid f \in I).$$

Nach Konstruktion gilt

$$X = V(F \mid f \in I) \cap A^n$$

[43] d.h. der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen des projektiven Raums, die X enthalten.

Insbesondere ist X eine offene Teilmenge der abgeschlossenen Teilmenge

$$V(F \mid f\in I) \subseteq P^n.$$

Aufgabe: Man beweise[44], es gilt sogar $X = V(F \mid f\in I)$.

Bemerkung

Bisher haben wir zwei Arten von Objekten betrachtet, affine und projektive abgeschlossene Menge. Im folgenden wollen wir eine gemeinsame Verallgemeinerung dieser Objekte betrachten.

(k) Quasi-proktive algebraische Varietäten

Eine quasi-projektive algebraische Varietät ist eine offene Teilmenge einer projektiven abgeschlossenen Menge.

Beispiele:

1. Projektive abgeschlossene Mengen sind quasi-projektiv.
2. Affine abgeschlossene Mengen sind quasi-projektiv (siehe (j)).

Bemerkungen

(i) Den Begriff der irreduziblen Menge definiert man für quasi-projektive Mengen wie im affinen Fall[45].

(ii) Wie im affinen Fall zeigt man, jede quasi-projektive Menge ist Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen[46].

(l) Teilvarietäten

Eine Teilvarietät einer quasi-projektiven Varietät X ist eine beliebige Teilmenge, die selbst wieder eine quasi-projektive Varietät ist, d.h. von der Gestalt

$$Y' - Y''$$

mit abgeschlossenen Teilmengen Y',Y'' von X.

5.4.2 Reguläre Funktionen

(a) Reguläre Funktionen auf dem P^n

Wir begegenen hier einem wichtigen Unterschied zwischen den Funktionen von homogenen und inhomogenen Koordinaten: eine rationale Funktion von den homogenen Koordinaten S_i,

---

[44] Da auf beiden Seiten der Identität abgeschlossene Mengen stehen, reicht es zu zeigen, jedes homogene Polynom, das auf der linken Seite identisch Null ist, ist es auch auf der rechten Seite. Sei also F homogen vom Grad d und identisch Null auf X. Dann ist $f(T) = F(1,T)$ identisch Null auf X, d.h. eine Potenz von f liegt im Ideal I, sagen wir

$$f^r \in I.$$

Das Polynom f hat einen Grad ≤d, d.h. die Homogenisierung von f^r,

$$f^r\left(\frac{S_1}{S_0},\dots,\frac{S_n}{S_0}\right)\cdot S_0^{r\cdot\deg f}$$

ist unterscheidet sich von F^r nur um eine S_0-Potenz. Die Homogenisierung ist aber identisch Null auf $V(F \mid f\in I)$, d.h. F^r ist es ebenfalls (als Vielfaches der Homogenisierung). Dann ist aber auch F identisch Null auf der rechten Seite.

[45] irreduzibel = nicht Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen

[46] Andernfalls gäbe es eine quasi-projektiv Menge X und eine unendliche echt absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen. Diese Teilmengen kommen von abgeschlossenen Teilmengen des projektiven Raums und liefern eine echt absteigende Kette von Abgeschlossenen Teilmengen im P^n. Durch Übergang zu den Idealen erhält man wie im affinen Fall einen Widerspruch.

$$f(S_0,\ldots,S_n) = \frac{P(S_0,\ldots,S_n)}{Q(S_0,\ldots,S_n)}$$

kann nicht automatisch als Funktion eines Punktes $[x]\in \mathbb{P}^n$ angesehen werden, auch wenn $Q(x) \neq 0$ ist. Denn der Wert von $f(x)$ kann sich ändern, wenn man die Koordinaten von $[x]$ mit einem $\lambda\in k - \{0\}$ multipliziert.
Eine Ausnahme bilden die homogenen Funktionen des Grades 0, d.h.

$$f = \frac{P}{Q} \text{ mit } P,Q \text{ homogen vom selben Grad}$$

kann als Funktion auf $\mathbb{P}^n$ angesehen werden.

(b) Reguläre Funktionen auf abgeschlossenen Mengen des P^n

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine quasi-projektive Varietät, $x\in X$ ein Punkt und

$$f = \frac{P}{Q}$$

mit homogenen Polynomen P,Q vom selben Grad und $Q(x) \neq 0$.Dann definiert f in einer Umgebung von x eine Funktion mit Werten in k,

$$f: X - - \to k.$$

Eine solche Funktion heißt regulär in $x\in X$.

Sie ist dann regulär in allen Punkten einer Umgebung von x.

Eine Funktion $f: X \to k$, die regulär in allen Punkten von X ist, heißt reguläre Funktion von X.

Die Menge aller regulären Funktionen auf X wird mit $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ oder auch mit $\mathcal{O}_X(X)$ bezeichnet[47].

Bemerkungen

(i) Wie bisher ist $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ mit den üblichen Operationen eine k-Algebra.

(ii) Wir haben uns dafür zu interessieren, ob dieser Begriff der regulären Funktion im Fall, daß X eine affine abgeschlossene Menge ist, mit dem bisher verwendeten übereinstimmt.

(c) Vergleich der beiden Regularitätsbegriffe im affinen Fall

Bei der nachfolgenden Argumentation bedeute ‘regulär’ regulär im alten Sinne. Seien

$$X \subseteq A^n \ (= D(S_0) \subseteq \mathbb{P}^n)$$

eine affine abgeschlossene Menge und f eine reguläre Funktion auf X, d.h.

$$f(x) = p(x) \text{ für alle } x\in X$$

mit einem Polynom $p\in k[T]$. Fassen wir X als Teilmenge von $D(S_0)$ auf, so bekommt diese Formel für die Werte von f die Gestalt

$$f([x]) = p(1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) = P(x)/x_0^d$$

mit einem homogenen Polynom P des Grades d. Damit ist aber f eine reguläre Funktion im eben definierten Sinne.

---

[47] Schafarevich verwendet die Bezeichnung k[X], die wir nur im Fall, daß X affin ist, verwenden wollen.

Sei jetzt umgekehrt f eine Funktion auf $X \subseteq D(S_0)$ mit

$$f([x]) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

für $[x]\in X$ mit homogenen Polynomen P,Q des Grades

$$d := \deg P = \deg Q.$$

Dann gilt

$$f([x]) = \frac{x_0^d \cdot P(x)}{x_0^d \cdot Q(x)} = \frac{P(\frac{x}{x_0})}{Q(\frac{x}{x_0})}$$

und wenn wir den Punkt als Punkt im affinen Raum auffassen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ mit } p(x) = P(1,x) \text{ und } q(x) = Q(1,x).$$

Mit anderen Worten, wir erhalten eine ‘rationale’ Funktion auf der (nicht-notwendig irreduziblen) Menge X. Im Fall daß X irreduzibel ist, haben wir in dieser Situation bereits bewiesen, daß f regulär ist. vgl. 1.3.2(d). Im allgemeinen Fall müssen wir den Beweis von 5.3.2(d) etwas abändern. Nach Voraussetzung haben wir für jeden Punkt $x\in X$ eine offene Umgebung $U_x\subseteq X$ und reguläre Funktionen p_x , $q_x \in k[X]$ mit $q_x \neq 0$ auf U_x und

$$f = \frac{p_x}{q_x} \text{ auf } U_x . \tag{1}$$

Wir können dabei annehmen, daß U_x eine offene Hauptmenge ist,

$$U_x =^{48} D(h_x)$$

mit einer regulären Funktion $h_x\in k[X]$. Es folgt

$$q_x \cdot f = p_x \text{ auf } U_x = D(h_x),$$

also

$$q_x \cdot h_x \cdot f = p_x \cdot h_x \text{ auf } X.$$

Wegen $x\in U_x$ gilt $h_x(x) \neq 0$, d.h.wir können die Darstellung für f mit h_x erweitern und erhalten wieder eine Darstellung für f, die für die Regularität von f im Punkt x sorgt. Wir haben gezeigt, wir können die Polynome p_x und q_x in der Darstellung (1) so wählen, daß außerdem noch

$$q_x \cdot f = p_x \text{ auf } X$$

gilt. Wie im Beweis von 5.3.2(d) haben die q_x keine gemeinsame Nullstelle auf X und es gibt endlich viele Punkte $x_1,...,x_N$ und reguläre Funktionen $r_1,...,r_1\in k[X]$ mit

$$1 = \sum_{i=1}^{N} r_i \cdot q_{x_i}$$

Multiplikation mit f liefert,

$$f = \sum_{i=1}^{N} r_i \cdot p_{x_i} \in k[X],$$

d.h. f ist eine reguläre Funktion.

---

[48] Für $h\in k[X]$ mit dem Repräsentanten $p\in k[X]$ soll $D(h) = D(p)\cap X$ sein.

Bemerkungen

(i) Im Gegensatz zur affinen Situation kann es jetzt vorkommen, daß der Ring $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ der regulären Funktionen ausschließlich aus Konstanten besteht, $\Gamma(\mathcal{O}_X) = k$.

(ii) Im nachfolgenden Abschnitt 1.5 werden wir zeigen, daß dies für projektive abgeschlossene Mengen der Fall ist.

(iii) Unmittelbar kann man dies im Fall $X = \mathbb{P}^n$ sehen. Sei

$$f = \frac{P}{Q}$$

mit homogenen Polynomen desselben Grades $d = \deg P = \deg Q$. Wir können annehmen, daß P und Q teilerfremd sind. Dann ist f in allen Punkten $x \in \mathbb{P}^n$ mit $Q(x) = 0$ nicht regulär[49].

(iv) In anderen Fällen kann sich der Ring $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ als unerwartet groß erweisen. Wir wissen, für affine abgeschlossene Mengen X ist $\Gamma(\mathcal{O}_X) = k[X]$ endlich erzeugt über k. Rees und Nagata haben quasi-projektive Varietäten konstruiert, bei denen das nicht so ist.

(d) Reguläre Abbildungen mit Werten im A^n

Eine Abbildung einer quasi-projektiven Varietät X mit Werten im $\mathbb{A}^n$,

$$f: X \to \mathbb{A}^n,\ x \mapsto (f_1(x),...,f_n(x)),$$

heißt <u>regulär</u>, wenn ihre Koordinatenfunktionen f_i reguläre Funktionen auf X sind.

(e) Reguläre Abbildungen von quasi-projektiven Varietäten

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung von quasi-projektiven Varietäten mit,

$$Y \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Diese Abbildung heißt <u>regulär im Punkt</u> $x \in X$, wenn es für jede (bzw. für eine) affine offene Menge $D(S_i) \subseteq P^n$ mit $f(x) \in D(S_i)$ eine offene Umgebung U des Punktes x gibt mit $f(U) \subseteq D(S_i)$ und mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung

(1) $$f|_U : U \to D(S_i) = A^n$$

regulär ist. Die Abbildung heißt <u>regulär</u> schlechhin, wenn sie regulär in allen Punken von X ist.

Überzeugen wir uns, daß die obige Bedingung, wenn sie für ein $D(S_i)$ mit $f(x) \in D(S_i)$ erfüllt ist, für alle solchen $D(S_i)$ erfüllt ist. Sei also die Einschränkung (1) regulär, d.h. von der Gestalt

$$f|_U : U \to D(S_i),\ y \mapsto (f_1(y),...,f_{i-1}(y),1,f_{i+1}(y),...,f_n(y)),$$

[49] Weil das Ideal des $\mathbb{P}^n$ das Null-Ideal ist, erhält man alle anderen Darstellungen für f durch Erweitern des Bruches $\frac{P}{Q}$ mit homogenen Polynomen, d.h. auch in den anderen Darstellungen ist der Nenner im Punkt x gleich Null.

mit regulären Funktionen $f_i \in k[U]$. Liegt f(x) außerdem noch in $D(S_j)$, so ist die j-te Koordinatenfunktion f_j in x von Null verschieden und dies gilt für eine ganze offene Umgebung $V \subseteq U$ von x. Auf V können wir f wie folgt beschreiben.

$$f|_V : V \to D(S_j),\ y \mapsto \left(\frac{f_1(y)}{f_j(y)},\dots,\frac{f_{i-1}(y)}{f_j(y)},\frac{1}{f_j(y)},\frac{f_{i+1}(x)}{f_j(x)},\dots,\frac{f_n(x)}{f_j(x)}\right).$$

Dies ist eine reguläre Abbildung.

Bemerkung
Wie im Fall regulärer Abbildung von affinen abgeschlossenen Mengen, induziert eine reguläre Abbildung

$$f: X \to Y$$

von quasi-projektiven Varietäten einen Homomorphismus

$$f^*: \Gamma(\mathcal{O}_Y) \to \Gamma(\mathcal{O}_X)$$

von k-Algebren und es gelten die üblichen Formeln

$$(g\circ f)^* = f^*\circ g^* \text{ und } Id^* = Id.$$

(f) Beschreibung regulärer Abbildungen in homogenen Koordinaten

Eine reguläre Abbildung

$$f: X \to \mathbb{P}^n$$

(mit X quasi-projektiv) ist gegeben durch ein (n+1)-Tupel

(1) $$(F_0,\dots,F_n)$$

von homogenen Polynomen F_i gleichen Grades. Ist

$$(G_0,\dots,G_n)$$

ein weiteres solches Tupel, so beschreibt es dieselbe reguläre Funktion, wenn gilt

(2) $$F_iG_j - F_jG_i = 0 \text{ auf } X.$$

Außerdem muß es für jeden Punkt $x \in X$ ein Tupel $(F_0,\dots,F_n)$ geben mit

$$F_i(x) \ne 0$$

für mindestens ein i. Der Punkt

(3) $$f(x) = [F_0(x),\dots,F_n(x)] \in P^n$$

ist dann gerade das Bild von x bei f.

Beweis. Sind die angegebenen Bedingungen erfüllt, so gilt in einer Umgebung von x,

$$f(y) = [F_0(y),\dots,F_n(y)] = \left[\frac{F_0(y)}{F_i(y)}, \dots, \frac{F_n(y)}{F_i(y)}\right].$$

Im letzten Ausdruck sind die Koordinaten gerade Quotienten homogener Polynome gleichen Grades, wobei der Nenner nicht Null ist und die i-te Koordinate gleich 1. Mit anderen Worten, f ist in einer Umgebung von x eine reguläre Funktion mit Werten in $D(S_i)$.

Bedingung (2) bedeutet gerade, die durch die G's definierten Bildpunkte haben Koordinaten, die proportional sind zu denen, die durch die F's gegeben sind. Mit anderen Worten, die durch die F's und die G's beschriebenen Abbildungen stimmen in den Punkten, in denen beide definiert sind, überein.

Sei umgekehrt $f: X \to \mathbb{P}^n$ regulär und x ein Punkt mit $f(x) \in D(S_i)$. Dann hat f auf einer offenen Umgebung U von x die Gestalt

$$f(y) = [f_0(y),...,f_n(y)]$$

mit regulären Funktionen $f_j =$[50] $\frac{P_j}{Q_j}$ und homogenen Polynomen P_j, Q_j mit

$$\deg P_j = \deg Q_j \text{ und } Q_j(y) \ne 0 \text{ für } y \in U.$$

Wir bringen alle Brüche auf den Hauptnenner und können so annehmen,

$$Q_j = Q \text{ für alle } j$$

und damit

$$\deg P_j \text{ unabhängig von } j.$$

Damit können wir f in einer Umgebung von x in der folgenden Gestalt schreiben.

$$f(y) = [P_0(y),...,P_n(y)]$$

wobei die i-te Koordinate in allen Punkten dieser Umgebung ungleich Null ist.

Hat man eine weitere solche Darstellung, sagen wir

$$f(y) = [R_0(y),...,R_n(y)]$$

und sind beide Darstellungen auf der offenen Teilmenge $U \subseteq X$ definiert, so gilt

$$P_iR_j - P_jR_i = 0 \text{ auf } U.$$

für alle i und j. O.B.d.A. können wir annehmen, U ist eine offene Hauptmenge, sagen wir

$$U = D(H).$$

Dann gilt

$$P_iR_jH - P_jR_iH = 0 \text{ auf } X$$

Mit anderen Worten, indem wir die aus den lokalen Beschreibungen gewonnenen Tupel mit geeigneten homogenen Polynomen multiplizieren, erhalten wir Tulpel, für welche die Relationen (2) bestehen[51]
QED.

(g) Beispiel für eine reguläre Abbildung

Seien $X := V(x^2+y^2-1) \subseteq A^2$ der Einheitskreis und

$$f: X \to A^1, (x,y) \mapsto \frac{y}{1-x},$$

die Projektion auf die y-Achse mit dem Zentrum (1,0). Führen wir projektive Koordinaten ein:

$$x = \frac{v}{u}, \ y = \frac{w}{u}.$$

Dann bekommt die Abbildung die Gestalt

$$f([1,\frac{v}{u},\frac{w}{u}]) = [1, \frac{y}{1-x}] = [1-x,y] = [1-\frac{v}{u},\frac{w}{u}] = [u-v, w],$$

d.h.

$$f[u,v,w] = [u-v,w].$$

Die beiden homogenen Polynome u-v und w sind Null im Punkt [1,1,0] (und nur dort). Aber auf dem Einheitskreit gilt

$$v^2 + w^2 - u^2 = 0$$

---

[50] Für j=i können wir $f_j = 1$ annehmen.

[51] d.h. das Tupel $(P_0H,...,P_nH)$ beschreibt die Funktion f in allen Punkten von X, in denen es überhaupt eine Funktion beschreibt, und für zwei Tupel mit dieser Eigenschaft bestehen die Relationen (2).

$$w^2 = u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$$

also

$$f[u,v,w] = [(u-v)w, w^2] = [(u-v)w, (u+v)(u-v)] = [w, u+v]$$

Die Formen w und u+v sind in [1,1,0] nicht beide Null, d.h. die Abbildung ist regulär.

(h) Isomorphie

Eine reguläre Abbildung quasi-projektiver Varietäten heißt Isomorphismus, wenn es eine Umkehrabbildung gibt und diese regulär ist.

Quasi-projektive Varietäten heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Eine affine Varietät ist eine quasi-projektive Varietät, die isomorph ist zu einer affinen abgeschlossenen Menge.

Eine projektive Varietät ist eine quasi-projektive Varietät, die isomorph zu einer projektiven abgeschlossenen Menge ist.

Beispiel

$X = A^1 - \{0\}$ ist zwar nicht abgeschlossen im $\mathbb{A}^1$ aber isomorph zur Hyperbel $Y = V(xy-1) \subseteq \mathbb{A}^2$, also eine affine Varietät.

Der Begriff der affinen abgeschlossenen Menge ist somit nicht invariant bei Isomorphismen, während es der Begriff der affinen Varietät nach Definition ist.

Bemerkungen

(i) Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß $X \subseteq P^n$ abgeschlossen ist, wenn X eine projektive Varietät ist. Der Begriff der projektiven abgeschlossenen Menge ist somit invariant bei Isomorphismen und fällt mit dem Begriff der projektiven Varietät zusammen.

(ii) Es gibt quasi-projektive Varietäten, die weder affin noch projektiv sind (vgl. Aufgabe 5 und die Aufgaben 4,5,6 zum nächsten Abschnitt).

(i) Begriff der lokalen Eigenschaft

Sei X eine Varietät. Eine Eigenschaft, die X besitzt, sobald sie die Mengen U_α einer offenen Überdeckung von X besitzen, heißt lokal.

(j) Die Abgeschlossenheit ist eine lokale Eigenschaft

Die Eigenschaft einer Teilmenge $Y \subseteq X$, abgeschlossen zu sein in einer quasi-projektiven Varietät X, ist eine lokale Eigenschaft.

Beweis. Sei $X = \cup U_\alpha$ eine offene Überdeckung mit

$$Y \cap U_\alpha \text{ abgeschlossen in } U_\alpha$$

für jedes α. Wir haben zu zeigen, dann ist Y abgeschlossen in X.
Nach Voraussetzung gilt

$$U_\alpha = X - Z_\alpha \text{ mit } Z_\alpha \text{ abgeschlossen in X.}$$

und

$$Y \cap U_\alpha = U_\alpha \cap T_\alpha \text{ mit } T_\alpha \text{ abgeschlossen in X.}$$

Es reicht zu zeigen,

$$Y = \cap (Z_\alpha \cup T_\alpha). \tag{1}$$

Sei $y \in Y$. Für $y \in U_\alpha$ gilt

$$y \in Y \cap U_\alpha \subseteq T_\alpha$$

und für $y \notin U_\alpha$ gilt

$$y \in Y - U_\alpha = Z_\alpha$$

In beiden Fällen gilt $y \in Z_\alpha \cup T_\alpha$. Damit gilt in (1) wenigstens "$\subseteq$".

Sei jetzt umgekehrt $y \in T_\alpha \cup Z_\alpha$ für alle α. Wegen $X = \cup U_\alpha$ gilt

$$y \in U_\alpha$$

für mindestens ein α. Damit gilt $y \notin Z_\alpha$, also $y \in T_\alpha$, also $y \in T_\alpha \cap U_\alpha \subseteq Y$.

QED.

(k) Topologiebasis der affinen Varietäten

Sei X eine quasi-projektive Varietät. Dann hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung, die isomorph zu einer affinen Varietät ist.

Beweis. Sei $X \subseteq P^n$. Wir können annehmen, $x \in X$ liegt in $D(S_0)$,

$$x \in D(S_0) = A^n,$$

d.h. die 0-the Koordinate von x ist nicht Null. Nach Definition der quasi-projektiven Varietät gilt

$$X \cap D(S_0) = Y - Y'$$

mit abgeschlossenen Mengen $Y, Y' \subseteq A^n$. O.B.d.A. sei $Y' \subseteq Y$. Wegen $x \in Y$ gibt es ein Polynom $f \in k[T]$ mit

$$f = 0 \text{ auf } Y' \text{ und } f(x) \neq 0.$$

Dann gilt

$$x \in D(f) \cap Y \subseteq Y - Y'$$

und es reicht zu zeigen, daß

$$D(f) \cap Y$$

isomorph ist zu einer affinen Varietät.

Sei

$$Y = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq A^n$$

Seien Z die affine Varietät

$$Z := V(f_1, \ldots, f_m, T_{n+1} \cdot f - 1) \subseteq A^{n+1}$$

und φ die reguläre Abbildung

$$\varphi: Z \to A^n, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n).$$

Das Bild von φ liegt offensichtlich in Y und in allen Bildpunkten x gilt $f(x) \neq 0$, d.h. φ ist eine Abildung

$$\varphi: Z \to D(f) \cap Y.$$

Weiter ist die Abbildung

$$\psi: D(f) \cap Z \to Z, x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f(x)})$$

wohldefiniert und regulär. Es ist leicht zu sehen, daß φ und ψ invers zueinander sind.

QED.

(l) Der Koordinatenring der offenen Hauptmengen eine affinen Varietät

Seien $X \subseteq A^n$ eine affine Varietät und $f \in k[X]$. Dann ist die offene Hauptmenge

$$D(f) \subseteq X$$

isomorph zu

$$Y := \{(x,y) \in \mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^1 \mid x \in X \text{ und } y\cdot f(x) - 1 = 0 \}.$$

Genauer, die regulären Abbildungen

$$\psi: D(f) \longrightarrow Y, x \mapsto (x, 1/f(x)),$$

und

$$\varphi: Y \longrightarrow D(f), (x,y) \mapsto x,$$

sind zueinaner inverse Isomorphismen. Mit $k[X] = k[x_1,...,x_n]$ gilt insbesondere

$$\begin{aligned} k[D(f)] &\cong k[x_1,...,x_n, y] / (y\cdot f(x_1,...,x_n) - 1) \\ &\cong k[x_1,...,x_n, 1/f(x_1,...,x_n, y)] \\ &\cong k[X]_f \end{aligned}$$

(m) Stetigkeit der regulären Abbildungen in der Zariski-Topologie

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung quasi-projektiver Varietäten. Dann ist das vollständige Urbild $f^{-1}(Z)$ einer abgeschlossenen Menge $Z\subseteq Y$ abgeschlossen.

Beweis. Sei $x\in X$. Dann gibt es offene Umgebungen

$U \subseteq X$ von x

und

$V \subseteq Y$ von $y = f(x)$

mit

$U\subseteq A^m$, $V\subseteq A^n$, $f(U) \subseteq V$

derart, daß die Einschränkung

$g: U \to V$

von f regulär ist. Nach (k) können wir annehmen, U ist affine Varietät. Nach (j) reicht es zu zeigen,

$$f^{-1}(Z)\cap U = g^{-1}(Z\cap V)$$

ist abgeschlossen in U. Wegen $Z\cap V$ abgeschlossen in V gilt

$$Z\cap V =^{52} \{y\in V \mid \varphi_1(y) = ... = \varphi_r(y) = 0\}$$

mit gewissen regulären Funktionen g_i auf V. Dann gilt aber

$$f^{-1}(Z)\cap U = \{ x\in U \mid \varphi_1(g(x)) = ... = \varphi_r(g(x)) = 0\}.$$

Da die $\varphi_j\circ g$ reguläre Funktionen auf U sind, ist diese Menge aber abgeschlossen in U.

QED.

(n) Alternative Definiton der Regulärität

Eine reguläre Abbildung $f: X\to Y$ ist eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, daß bei Verpflanzung entlang f reguläre Funktionen in reguläre Funktionen übergehen.

---

[52] $Z\cap V$ ist Durchschnitt von V mit einer abgeschlossenen Menge des A^n. Letztere ist durch endlich viele Gleichungen definiert.

5.4.3 Rationale Funktionen und Abbildungen

(a) Rationale Funktionen

Sei $X \subseteq P^n$ eine irreduzible quasi-projektive Varieät.
Bezeichnungen:

$$\mathcal{O}_X :=^{53} \{\frac{P}{Q} \mid P,Q\in k[S] \text{ homogen vom selben Grad, } Q\{I(X)\}$$

$$M_X := \{\frac{P}{Q}\in O_X \mid P\in I(X)\ \}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{O}_X$ ein Ring ist. Nach Konstruktion ist jedes Element von $\mathcal{O}_X$, das nicht in M_X liegt, eine Einheit, d.h. M_X ist maximales Ideal von $\mathcal{O}_X$ (das einzige), und

$$k(X) := \mathcal{O}_X/M_X$$

ein Körper. Er heißt Körper der rationalen Funktionen von X.

Bemerkungen

(i) Da X irreduzibel ist, haben je zwei nicht-leere offene Mengen von X einen nicht-leeren Durchschnitt. Das hat zur Folge, daß zwei rationale Funktionen auf X genau dann gleich sind, wenn sie auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge gleich sind. Deshalb gilt

$$k(X) = k(U) \text{ für } U \subseteq X \text{ nicht-leer und offen.}$$

(ii) Aus (i) ergibt sich,

$$k(X) = k(\overline{X}),$$

wenn $\overline{X}$ die Abschließung von X im projektiven Raum bezeichnet.

(iii) Für affine Varietäten stimmt die hier gegebene Defintion mit der ursprünglichen überein.

(iv) Eine rationale Funktion $f\in k(X)$ heißt <u>regulär</u> im Punkt $x\in X$, wenn es homogene Polynome P,Q desselben Grades gibt mit

$$f = \frac{P}{Q} \text{ in } k(X) \text{ und } Q(x) \neq 0.$$

In dieser Situation heißt $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ Wert von f in x. Die Menge der Punkte, in denen f regulär ist, wird mit

$$\mathrm{Def}(f)$$

bezeichnet und heißt Definitionsbereich von f.

(v) Eine rationale Funktion auf X kann man auch definieren als eine Funktion, die regulär auf einer offen Teilmenge von X ist.

(b) Rationale Abbildungen mit Werten im P^n

Sei $X\subseteq\mathbb{P}^M$ eine irreduzible quasi-projektive Varietät. Eine rationale Abbildung

$$f: X \to \mathbb{P}^N$$

ist gegeben durch ein (n+1)-Tupel

$$(F_0,...,F_n)$$

von homogenen Polynomen gleichen Grades, wobei wenigstens ein F_i nicht identisch Null ist auf X. Zwei solche (n+1)-Tupel $(F_0,...,F_n)$ und $(F'_0,...,F'_n)$ definieren dabei dieselbe rationale Abbildung, wenn

---

[53] Dies ist der lokale Ring des $\mathbb{P}^n$ im allgemeinen Punkt X.

$$F_i F'_j = F_j F'_i$$

gilt für alle i und j.

Indem man durch eines der F_i teilt, welches nicht identisch Null ist, kann man eine rationale Abbildung auch durch Angabe von n+1 rationalen Funktionen auf X definieren. Sind diese Koordinatenfunktionen sämtlich in einem Punkt regulär, so sagt man die rationale Abbildung sei regulär in diesem Punkt.

Die Menge der Punkte, in denen eine rationale Abbildung f regulär ist, ist nicht-leer und offen. Sie wird mit

$$\mathrm{Def}(f)$$

bezeichnet. Weiter heißt

$$\mathrm{Im}\, f := f(\mathrm{Def}(f))$$

Bild von f.

Bemerkungen

(i) Man kann eine rationale Abbildung auch definieren als reguläre Abbildung auf einer offenen Teilmenge.

(c) Allgemeine rationale Abbildungen

Seien X und $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ irreduzible quasi-projektive Varietäten. Eine rationale Abbildung

$$f{:}X \to Y$$

ist dann eine rationale Abbildung $f{:}X \to \mathbb{P}^n$ mit $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$.

Bemerkungen

(i) Jede dominante rationale Abbildung f: $X \to Y$ (d.h. $\overline{\mathrm{Im}(f)} = Y$) induziert einen k-Homomorphismus
$$f^*: k(Y) \to k(X)$$
mit den üblichen Eigenschaften.

(ii) Eine rationale Abbildung mit einer (rationalen) Inversen, heißt birationaler Isomorphismus. Falls ein solcher existiert, so heißen die beteiligten Varietäten birational isomorph.

(iii) Zwei quasi-projektive Varietäten X und Y sind genau dann birational isomorph, wenn $k(X) \cong k(Y)$ über k gilt.

(d) Isomorphie und birationale Isomorphie

Zwei irreduzible quasi-projektive Varietäten X,Y sind genau dann birational isomorph, wenn es isomorphe nicht-leere offene Teilmengen

$$U \subseteq X\ ,\ V \subseteq Y$$

gibt.

Beweis.Falls isomorphe offene Teilmengen $U\subseteq X$ und $V\subseteq Y$ existieren, so gilt

$$k(X) = k(U) \cong k(V) = k(Y),$$

d.h. X und Y sind birational isomorph. Existiere jetzt umgekehrt ein birationaler Isomorphismus

$$f\colon X \dashrightarrow Y$$

und sei

$$g\colon Y \dashrightarrow X$$

dessen Umkehrung.

Weiter seien

$U' := \mathrm{Def}(f)$
$V' := \mathrm{Def}(g)$

die Definitionsbereiche von f bzw. g. Nach Voraussetzung ist die Verpflanzungsabbildung $g^*\circ f^*$ die identische Abbildung. Insbesondere ist

$$f^*: k[Y] \to k(X)$$

injektiv[54]. Das bedeutet, Im(f) $\subseteq$ Y liegt dicht in Y. Insbesondere ist Im(f)$\cap$V' nicht leer. Dann ist aber

$$U := f^{-1}(V')\cap U'$$

eine nicht-leere offene Teilmenge von X. Analog ist

$$V := g^{-1}(U')\cap V'$$

nicht-leer und offen in Y. Nach Konstruktion gilt

$$f(U) \subseteq V' \text{ und } g(f(U)) =^{55} U, \text{ d.h. } f(U) \subseteq g^{-1}(U) \subseteq g^{-1}(U'),$$

also

$$f(U) \subseteq V.$$

Analog folgt

$$g(V) \subseteq U.$$

Nach Voraussetzung sind die Einschränkung f: U $\to$ V und g: V$\to$U invers zueinander (und nach Konstruktion reguläre Funktionen).
QED.

5.4.4 Beispiele regulärer Abbildungen

(a) Die Projektion aus einem linearen Unterraum

Seien $L_1,...,L_{n-d} \in k[S]$ homogene Polynome des Grades 1, welche über k linear unabhängig sind. Dann ist

$$E := V(L_1,...,L_{n-d}) \subseteq \mathbb{P}^n$$

ein linearer Unterraum der Dimension d. Die rationale Abbildung

$$\pi: P^n - - \to P^{n-d-1}, x \mapsto [L_1(x),...,L_{n-d}(x)].$$

heißt Projektion mit dem Zentrum E. Diese Abbildung ist auf $\mathbb{P}^n$ - E regulär. Für jede abgeschlossene Menge

$$X \subseteq \mathbb{P}^n - E$$

des projektiven Raumes, die sich mit E nicht schneidet, induziert π eine reguläre Abbildung

$$\pi: X \longrightarrow \mathbb{P}^{n-d-1}.$$

Diese Abbildung läßt sich wie folgt geometrisch interpredieren. Wir wählen als Model für den Bildraum $\mathbb{P}^{n-d-1}$ einen beliebigen linearen Unterraum H des $\mathbb{P}^n$ der Dimension n-d-1, der sich mit E nicht schneidet,

$$H \subseteq P^n, H \cap E = \emptyset, \dim H = n\text{-}d\text{-}1.^{56}$$

---

[54] Das Einsetzen der Kooridnatenfunktionen von $f\circ g$ in reguläre Funktionen kann man in zwei Schritten ausführen. Erhält man beim ersten Schritt Null, ist auch das Endergebnis Null.

[55] Nach Definition von U ist f auf ganz U definiert und g auf f(U) $\subseteq$ V'. Die Zusammensetzung $g\circ f$ stimmt auf U mit der identischen Abbildung überein.

[56] Ein solcher Unterraum existiert. Ist nämlich E' $\subseteq k^{n+1}$ der lineeare Unterraum, der Lösungen des linearen homogenen Gleichungssystems $L_i(x) = 0$,

$$E' := \{x \in k^{n+1} \mid L_1(x),...,L_{n-d}(x) = 0\}$$

und F' $\subseteq k^{n+1}$ ein zu E' komplementärer linearer Unterraum,d.h. k^{n+1} = E' $\oplus$ F', so hat die Menge der eindimensionalen Unterräume

Zu jedem Punkt $x \in P^{n-d-1} - E$ gibt es dann genau einen linearen Unterraum E_x der Dimension d+1, in welchem x und E enthalten sind,

$$E \subseteq E_x \text{ , } x \in E_x \text{ , } \dim E_x = \dim E + 1.$$

Dieser Unterraum E_x schneidet H in genau einem Punkt.[57] Dieser Punkt ist gerade $\pi(x)$,

$$E_x \cap H = \{\pi(x)\}.$$

Wenn X gemeinsame Punkte mit E hat, aber nicht ganz in E liegt, so ist π eine rationale Abbildung. Dem Fall d = 0, der Projektion aus einem Punkt, sind wir schon verschiedentlich begegnet.

(b) Die Veronese-Abbildung

Betrachten wir die Gesamtheit aller homogenen Polynome

$$F \in k[S] = k[S_0,...,S_n]$$

des Grades m in den n+1 Unbestimmten S_i. Sie bilden einen endlich-dimensionalen k-Vektorraum der Dimension

$$\dim k[S]_m =^{58} \binom{n+m}{m}.$$

$$F = \mathbb{P}(F') \subseteq \mathbb{P}^n$$

von F' die Dimension

$$\dim F = \dim F' - 1 = \dim k^{n+1} - \dim E' - 1 = (n+1) - (\dim E + 1) - 1 = n - \dim E - 1 = n - d - 1$$

und ist wegen $E' \cap F' = 0$ disjunkt zu E. Wir können also H := F setzen.

[57] E_x ist die Menge der eindimensionalen Unterräume von E'+k•x. Wegen

$$k^{n+1} = (E'+k\bullet x) + F'$$

gilt

$$\dim k^{n+1} = \dim (E'+k\bullet x) + \dim F' - \dim (E'+k\bullet x) \cap \dim F'$$

also

$$\begin{aligned} \dim (E'+k\bullet x) \cap \dim F' &= \dim (E'+k\bullet x) + \dim F' - \dim k^{n+1} \\ &= (d+2) + (n-d) - (n+1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Der Durchschnitt ist die einzige Gerade des k^{n+1} durch den Ursprung, die sowohl in E'+x•k als auch in F' liegt, und damit der einzige Punkt des $\mathbb{P}^n$, der in E_x und in F liegt.

[58] Für n = 0 ist diese Formel trivial. Für n > 0 ist dim $k[S]_m$ die Anzahl der Potenzprodukte

$$S_0^{\varepsilon_0} \bullet ... \bullet S_n^{\varepsilon_n}$$

des Grades m in den $S_0,...,S_n$. Für ε_n gibt es die Möglichkeiten m, m-1, ... , 0. Für gegebenes

$$\varepsilon_n = m-j$$

gibt es für die übrigen Exponenten nach Induktionsvoraussetzung

$$\dim k[S_0,...,S_{n-1}]_j = \binom{n-1+j}{j}$$

Möglichkeiten. Also gilt

$$\dim k[S]_m = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n-1+j}{j} + \binom{n+j}{j+1} + ... + \binom{n-1+m}{m}$$

Wir interessieren uns für die Varietäten im $\mathbb{P}^n$ mit der Gleichung F = 0. Diese heißen Hyperflächen des Grades m.
Die Polynome von $k[S]_m$ sind durch ihre Koeffizienten-Tupel gegeben, die wir als Punkte des $\mathbb{A}^N$ mit $N = \binom{n+m}{m}$ betrachten können. Zueinander proportionale Polynome definieren dieselbe Hyperfläche, d.h. die Hyperflächen des Grades N entsprechen den Punkten des projektiven Raums

$$\mathbb{P}^{N-1} \text{ mit } N = \nu_{n,m} := \binom{n+m}{m} - 1.$$

Bezeichnen wir die Koordinaten dieses projektiven Raumes mit

$$v_{i_0,\ldots,i_n}$$

wobei die Indizes i_j alle nicht-negativen ganzen Zahlen mit

$$i_0+\ldots+i_n = m$$

durchlaufen und betrachten die Abbildung

$$v: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{\nu_{n,m}}, x \mapsto (\ldots,v_{i_0,\ldots,i_n}(x),\ldots),$$

mit $v_i = x^i$ in Multi-Index-Schreibweise,d.h.

$$v_{i_0,\ldots,i_n}(x) = x_0^{i_0}\cdot\ldots\cdot x_n^{i_n} \quad \text{für } x = (x_0,\ldots,x_n).$$

Diese Abbildung heißt m-Veronese-Abbildung. Diese Abbildung ist regulär, denn die $x_0^m,\ldots, x_n^m$ kommen unter den Koordinatenfunktionen vor und sind nie gleichzeitig Null. Das Bild der Veronese-Abbildung heißt Veronese-Varietät.

(c) Die Gleichungen der Veronese-Varietät

Nach Konstruktion bestehen auf der Veronese-Varietät die Relationen

$$v_i v_j = v_k v_l \text{ für alle i,j,k,l mit } i+j = k+l. \tag{1}$$

Bestehen umgekehrt für einen Punkt des

$$[\ldots,v_{i_0,\ldots,i_n},\ldots] \in \mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$$

Wegen $\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0}$ und $\binom{u}{v}+\binom{u}{v+1}=\binom{u+1}{v+1}$ folgt

$$\begin{aligned}
\dim k[S]_m &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n-1+j}{j}+\binom{n+j}{j+1}+\ldots+\binom{n-1+m}{m}\\
&\ldots\\
&= \binom{n+j}{j}+\binom{n+j}{j+1}+\binom{n+j+1}{j+2}+\ldots+\binom{n-1+m}{m}\\
&= \binom{n+j+1}{j+1}+\binom{n+j+1}{j+2}+\binom{n+j+2}{j+3}+\ldots+\binom{n-1+m}{m}\\
&\ldots\\
&= \binom{n+m}{m}
\end{aligned}$$

die Relationen (1), so muß mindestens eine der Koordinaten

$$v_{me_\alpha} = v_{0,\dots,m,\dots,0}$$

(e_α bezeichne das α-te Standard-Einheitstupel) von Null verschieden sein[59]. O.B.d.A. sei

$$v_{me_0} \neq 0.$$

Dann ist $[v_{me_0}, v_{(m-1)e_0+e_1}, \dots, v_{(m-1)e_0+e_n}]$ aber ein wohldefinierter Punkt des $\mathbb{P}^n$. Auf Grund der Relationen (1) ist sein Bild bei der Veronese-Abbildung gerade der vorgegebene Punkt.
Wir haben gezeigt: <u>die Veronese-Varietät ist eine projektive Varietät mit den Gleichungen (1) und die Veronese-Abbildung</u>

$$v: P^n \to \mathrm{Im}(v)$$

ist ein Isomorphismus.
Bemerkung
Ist $X = V(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche des Grades m mit der Gleichung

$$F(S) = \sum_{i_0,\dots,i_n} a_{i_0,\dots,i_n} S_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot S_n^{i_n},$$

so ist das Bild von $X \subseteq \mathbb{P}^n$ bei der Veronese-Abbildung $v: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$ gerade der Durchschnitt

$$v(X) = \mathrm{Im}(v) \cap H$$

des Bildes von v mit der Hyperebene

$$H: \sum_{i_0,\dots,i_n} a_{i_0,\dots,i_n} v_{i_0,\dots,i_n} = 0 \text{ im } \mathbb{P}^{\nu_{n,m}}.$$

Diese Tatsache gestattet es, manche Fragen, die im Zusammenhang mit Hyperflächen auftreten, auf Fragen zu reduzieren, die sich auf Hyperebenen beziehen.

5.5 Produkte und Abbildungen quasi-projektiver Varietäten

5.5.1 Produkte

(a) Produkte von Teilvarietäten des A^n

Die Definition des Produkts affiner Varietäten war so naheliegend, daß sie keine weiteren Kommentare erforderte. Für beliebige quasi-projektive Varietäten ist die Situation komplizierter. Deshalb betrachten wir zunächst quasi-projektive Teilvarietäten der affinen Räume.
Seien $X \subseteq A^m$ und $Y \subseteq A^n$ quasi-projektiv. Dann gilt:
(i) Das direkte Produkt

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

ist quasi-projektiv in $A^m \times A^n$.

---

[59] Wegen (1) ist für jedes i eine Potenz der Koordinate v_i ein Produkt von Koordinaten dieser Gestalt. Wären alle diese speziellen Koordinaten Null, so müßten alle v_i Null sein.

(ii) Die in (i) definierte Struktur einer quasi-projektiven Varietät ist invariant gegenüber Isomorphismen, d.h. sind $\varphi: X \to \tilde{X}$ und $\psi: Y \to \tilde{Y}$ Isomorphismen quasi-projektiver Varietäten, so ist auch

$\varphi\times\psi: X\times Y \to \tilde{X}\times\tilde{Y}$

ein Isomorphismus.

Beweis. Zu (i). Wir schreiben $X = X'-X''$ und $Y = Y'-Y''$ mit abgeschlossenen Teilmengen

$$X', X'' \subseteq A^m \text{ und } Y', Y'' \subseteq A^n.$$

Damit ist aber

$$X\times Y = X'\times Y' - (X'\times Y'' \cup X''\times Y'),$$

also quasi-projektiv.

Zu (ii). Offensichtlich ist $\varphi\times\psi$ eine reguläre Abbildung. Dasselbe gilt für die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\times\psi^{-1}$.

QED.

(b) Die Lokalitätsforderung an die Definition

Seien $X\subseteq\mathbb{P}^m$ und $Y\subseteq\mathbb{P}^n$ quasi-projektive Varietäten. Und bezeichne $X\times Y$ wie üblich die Menge der Paare

$$X\times Y = \{(x,y) \mid x\in X, y\in Y\}.$$

Wir wollen $X\times Y$ mit der Struktur einer quasi-projektiven Varietät versehen und zu diesem Zweck die Menge mit einer Einbettung in einen projektiven Raum versehen,

$$\varphi: X\times Y \to \mathbb{P}^N,$$

welche das Produkt zu einer quasi-projektiven Teilvarietät von $\mathbb{P}^N$ macht.

Dabei ist es naheliegend, zu fordern, daß die so gewonnene Definition von lokaler Natur ist, d.h. für je zwei Punkte $x\in X$ und $y\in Y$ sollen affine Umgebungen U und V existieren,

$$x \in U \subseteq X \text{ und } y \in V \subseteq Y,$$

mit der Eigenschaft, daß

$$\varphi(U\times V) \subset \varphi(X\times Y)$$

eine offene Teilmenge ist und die Einschränkung von φ ein Isomorphismus

$$U\times V \to \varphi(U\times V)$$

von quasi-projektiven Varietäten.[60]

Behauptung: Durch diese Forderung der Lokalität ist das direkte Produkt bereits, falls es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei

$$\psi: X\times Y \to \mathbb{P}^M$$

eine weitere Einbettung mit den geforderten Eigenschaft. Wir haben zu zeigen, daß dann

$$\varphi\circ\psi^{-1}: \psi(X\times Y) \to \varphi(X\times Y)$$

ein Isomorphismus quasi-projektiver Varietäten ist.

Nach Konstruktion ist diese Abbildung bijektiv. Es reicht also zu zeigen, die Abbildung und ihre Umkehrung sind regulär. Aus Symmetrie-Gründen reicht es, die Regularität der Abbildung selbst zu beweisen. Nun ist die Regularität eine lokale Eigenschaft, d.h. es reicht, eine offene Überdeckung des Definitionsbereichs zu finden, so daß die Abbildung auf jeder offenen Menge der Überdeckung regulär ist. Sei also

$$z \in \psi(X\times Y)$$

[60] Man beachte, die Isomorphie-Bedingung bleibt erhalten, wenn man U und V durch offene affine Teilmengen ersetzt, die ganz in U bzw. in V liegen, den Isomorphismus φ durch dessen Einschränkung.

ein vorgegebener Punkt,

$$z = \psi(x,y) \text{ mit } x\in X \text{ und } y\in Y.$$

Nach Voraussetzung gibt es affine offene Umgebungen

$U\subseteq X$ von x

$V \subseteq Y$ von y

derart, daß ψ einen Isomorphismus von $U\times V$ mit einer offenen Umgebung $\psi(U\times V)$ von z induziert,

(1) $\psi: U\times V \xrightarrow{\cong} \psi(U\times V)$ = Umgebung von z in $\psi(X\times Y)$.

Diese Situation bleibt erhalten, wenn wir U und V zum Beispiel durch offene Hauptmengen, die x bzw. y enthalten, ersetzen. Das bedeutet, wir können erreichen, daß gleichzeitig auch φ einen Isomorphismus

(2) $\varphi: U\times V \xrightarrow{\cong} \varphi(U\times V)$ = Umgebung von $\varphi(\psi^{-1}(z))$ in $\varphi(X\times Y)$

von affinen Varietäten induziert. Dann ist aber auch die Zusammensetzung der Inversen von (1) mit (2) ein Isomorphismus und insbesondere regulär im Punkt z.
QED.

(c) Vorbemerkung zur Konstruktion der Abbildung φ

Es reicht, die Abbildung φ für den Fall $X = \mathbb{P}^m$ und $Y = \mathbb{P}^n$ zu konstruieren. Hat nämlich

$$\varphi: \mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$$

die geforderten Eigenschaften und sind $X\subseteq\mathbb{P}^m$ und $Y\subseteq\mathbb{P}^n$ quasi-projektive Teilvarietäten, so hat die Einschränkung von φ auf die Teilmenge $X\times Y$ ebenfalls diese Eigenschaften.
Beweis. Man benutze die Tatsache, daß die Einschränkung eines Isomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge regulär ist, als Bild eine abgeschlossene Teilmenge besitzt und einen Isomorphismus mit dieser Teilmenge induziert.
QED.

(d) Konstruktion der Abbildung φ im Fall der projektiven Räume

Wir betrachten den projektiven Raum

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$

und führen für dessen projektive Koordinaten die folgenden Bezeichnungen ein:

$$w_{ij}\ ,\ i = 0,\dots,m,\ j = 0,\dots,n.$$

Sei

$$\varphi: \mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$$

die Abbildung mit

$$\varphi(x,y) = [\dots, x_iy_j,\dots]$$

d.h. der Bildpunkt $p := \varphi(x,y)$ soll die folgenden projektiven Koordinaten haben:

$$w_{ij}(p) := x_iy_j \tag{1}$$

<u>Die Abbildung φ ist wohldefiniert</u>.

Wegen $x\in\mathbb{P}^m$ ist eine projektive Koordinate von x ungleich Null, sagen wir $x_{i_0}\neq 0$.

Wegen $y\in\mathbb{P}^n$ ist eine projektive Koordinate von y ungleich Null, sagen wir $y_{j_0}\neq 0$.

Dann ist aber die projektive Koordinate $w_{i_0j_0}(p) := x_{i_0}y_{j_0}$ des Bildpunktes p ebenfalls ungleich Null.

<u>Die Abbildung φ ist injektiv</u>. Aus $\varphi(x,y) = \varphi(x',y')$ folgt

$$x_iy_j = x'_iy'_j \text{ für alle i und alle j.}$$

Mit i_0 und j_0 wie oben folgt

$$x_i = x'_i\cdot(y'_{j_0}/y_{j_0}) \text{ und } y_j = y'_j\cdot(x'_{i_0}/x_{i_0}).$$

Mit anderen Worten die Koordinaten von x und x' sind proportional, d.h. x=x' und analog y = y'.

$\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq P$ <u>ist abgeschlossen</u>.

Nach Konstruktion bestehen zwischen den Koordinaten der Bildpunkte von φ die folgenden Relationen.

$$w_{ij}\cdot w_{kl} - w_{jk}\cdot w_{il} = 0. \qquad (2)$$

Es reicht zu zeigen, diese Relationen definieren die Menge Im(φ). Sei also

$$p\in\mathbb{P}$$

ein Punkt, dessen Koordinaten $w_{ij} = w_{ij}(p)$ diesen Relationen genügen. Mindestens eine Koordinate von p ist ungleich Null. O.B.d.A. sei

$$w_{00}(p) \neq 0.$$

Wir setzen

$$x := [w_{00},...,w_{m0}]$$
$$y := [w_{00},...,w_{0n}]$$
$$q := \varphi(x,y).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} w_{ij}(q) &= w_{i0}\cdot w_{0j} = w_{00}\cdot w_{ij} \qquad \text{wegen (2)} \\ &= w_{00}\cdot w_{ij}(p). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten p und q haben proportionale Koordinaten, d.h. p = q. Wir haben gezeigt

$$\mathrm{Im}(\varphi) = V(w_{ij}\cdot w_{kl} - w_{kj}\cdot w_{il} \mid i,k = 0,...,m,\ j,l = 0,...,n\ ),$$

d.h. Im(φ) ist abgeschlossen in P.

<u>Es gibt eine Überdeckung des $\mathbb{P}^m$ durch affine offene Mengen U_i und eine Überdeckung des $\mathbb{P}^n$ durch affine offene Mengen V_j derart, daß für beliebige</u> i <u>und</u> j <u>die Abbildung</u> φ <u>Isomorphismen</u> $U_i\times V_j \to \varphi(U_i\times V_j)$ $(\subseteq P)$ <u>induziert</u>.

Wir setzen

$$U_i := D(S_i) \text{ für } i = 0,...,m.$$
$$V_j := D(S_j) \text{ für } j = 0,...,n$$

Dann gilt

$$\varphi(U_i\times V_j) = \mathrm{Im}(\varphi)\cap D(w_{ij})$$

Indentifiziert man $D(w_{ij})$ in der üblichen Weise mit dem affinen Raum (indem man w_{ij} = 1 setzt), so bekommt die Menge rechts die Gestalt

$$\varphi(U_i\times V_j) = \mathrm{Im}(\varphi)\cap D(w_{ij}) = V(w_{kl} - w_{kj}\cdot w_{il} \mid k,l = 0,...,0)$$

Rechts steht eine affine Varietät. Anhand der Gleichungen sehen wir, die Abbildung

$$\psi{:}V(w_{kl} - w_{kj}\cdot w_{il} \mid k,l = 0,...,0) \longrightarrow \mathbb{A}^m\times\mathbb{A}^n,$$

$$(c_{\alpha\beta})_{\alpha=0,\dots,m,\beta=0,\dots,n} \mapsto ((c_{0j}, \dots , c_{mj}),(c_{i0},\dots,c_{0n})),$$

ist ein Isomorphismus.

Die Zusammensetzung von $\varphi|_{U_i\times V_j}$ ist gerade die Abbildung

$$U_i\times V_j \xrightarrow{\varphi} V(w_{kl} - w_{kj}\cdot w_{il}) \xrightarrow{\psi} \mathbb{A}^m\times\mathbb{A}^n$$

mit der Eigenschaft, daß für $p = \varphi(x,y)$ gilt:

$$w_{kj}(p) = x_k\cdot y_j = x_k\cdot 1 = x_k$$
$$w_{il}(p) = x_i\cdot y_l = 1\cdot y_l = y_l$$

d.h. es ist $(\psi\circ\varphi)(x,y) = (x,y)$, d.h. $\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}$. Mit ψ ist auch φ ein Isomorphismus. Die von uns konstruierte Abbildung φ hat damit alle erforderlichen Eigenschaften.
QED.

(e) Bemerkung 1 (Interpretation der Gleichungen von Im(φ))

Die Koordinaten der Punkte des Raumes $\mathbb{P}$ bilden eine $(m+1)\times(n+1)$-Matrix

$$(w_{ij})_{i=0,\dots,m,j=0,\dots,n}$$

Die Gleichungen des Bildes $\mathrm{Im}(\varphi)$ kann man in der Gestalt

$$\begin{vmatrix} w_{ij} & w_{il} \\ w_{kj} & w_{kl} \end{vmatrix} = 0$$

schreiben. Sie bedeuten gerade, die Matrix hat den Rang 1,

$$\mathrm{rk}\ (w_{ij}) = 1.$$

Die Definition der Abbildung φ besagt aber gerade, die Matrix (w_{ij}) ist das Produkt aus einer Spalte und einer Zeile.

(f) Bemerkung 2 (Direktes Produkt zweier projektiver Geraden)

Betrachten wir den Fall m = n = 1,

$$\varphi{:}\ \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^3,\ ([u,v],[s,t]) \mapsto [us,ut,vs,vt].$$

Das Bild von φ ist durch nur eine Gleichung definiert[61] :

$$0 = \begin{vmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{vmatrix} = w_{00}w_{11} - w_{10}w_{01}$$

---

[61] Für i = k und für j = l sind die 2×2-Determinanten von (e) identisch Null. Beim Permutieren der Zeilen oder Spalten ändert sich nur das Vorzeichen. Wir können uns somit auf den Fall

$$i < l \text{ imd } k < l$$

beschränken, d.h. auf den Fall

$$i = 0,\ k = 1,\ j = 0,\ l = 1.$$

Bezeichnenen wir mit x,y,z,w die Koordinaten im $\mathbb{P}^3$. Dann ist das Bild von φ durch die einzige Gleichung

$$X := \mathrm{Im}\,(\varphi): xw - yz = 0$$

definiert, d.h. X ist eine nicht-entartete Fläche[62] zweiter Ordnung im $\mathbb{P}^3$. Die Geraden der Gestalt

$$\{p\}\times\mathbb{P}^1, \quad p = [u_0,v_0]$$

gehen bei φ wieder in Geraden über mit den Gleichungen

$$x:z = u_0:v_0 = y:w$$

d.h.

$$xv_0 = zu_0 \,,\; yv_0 = wu_0 \,.$$

Es gibt also auf X eine Familie von paarweise disjunkten Geraden, die die Fläche füllen und von dem stetigen Parameter $p = [u_0,v_0] \in P^1$ abhängen. Eine solche Fläche heißt[63] <u>Regelfläche</u>.

Analog gehen die Geraden der Gestalt

$$\mathbb{P}^1\times\{q\}, \quad q = [s_0,t_0]$$

in eine zweite Familie von paarweise disjunkten Geraden auf der Fläche über. Jede Gerade der einen Familie scheidet die Gerade der anderen in genau einem Punkt.

(g) Theorem 1 (die abgeschlossenen Mengen im $P^m\times P^n$

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind äquivalent:

(i) X ist abgeschlossen.

(ii) X ist in $\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$ definiert durch ein System von Gleichungen der Gestalt

$$G_i(u_0,...,u_m;v_0,...,v_n) = 0 \quad (i=1,...,t),$$

wobei die $G_i\in k[u,v]$ homogen sind sowohl als Polynome in den u_i als auch als Polynome in den v_j allein.

Beweis. <u>(i) ⇒ (ii)</u>. Nach Voraussetzung gilt

$$\varphi(X) = V(F_1,...,F_t)$$

mit homogenen Polynomen $F_i\in k[w]$. Damit ist aber

$$X = \{(u,v)\in P^m\times P^n \mid F_i(\varphi(u,v)) = 0 \text{ für } i=1,...,t\}$$
$$= V(F_1\circ\varphi,...,F_t\circ\varphi)$$

Nun entsteht aber $F_i\circ\varphi$ aus F_i indem man für die w_{ij} die Produkte u_iv_j einsetzt. Das bedeutet aber, $F_i\circ\varphi$ ist homogen sowohl in den u_i als auch in den v_j (vom selben Grad).

<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Da die Abgeschlossenheit eine lokale Eigenschaft ist, reicht es zu zeigen,

$$\varphi(X)\cap D(w_{ij}) \text{ ist abgeschlossen in } D(w_{ij})$$

für beliebige i und j. Wegen $w_{ij} = u_i\cdot v_j$ gilt aber

[62] Es gibt bis auf Isomorphie im projektiven Raum nur eine.

[63] Genauer, die Projektion auf den Parameter heißt Regelfläche,

$$X \to P^1, [x,y,z,w] \text{ a } [x,z].$$

$$\varphi(X)\cap D(w_{ij}) = \varphi(X\cap(D(u_i)\times D(v_j)))$$

Auf der Teilmenge $D(u_i)\times D(v_j) \subseteq \mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$ können wir aber die Gleichungen von X mit u_i oder v_j multiplizieren, ohne daß sich deren Nullstellenmenge ändert.

Deshalb können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, die Gleichungen von X haben bzgl. der u und der v denselben Grad,

$$\deg_u G_i = \deg_v G_i .$$

Mit anderen Wort, die G_i sind k-Linearkombinationen von Potenzprodukten der Gestalt

$$u^\alpha v^\beta \text{ mit}^{64} |\alpha| = |\beta|,$$

oder noch anders ausgedrückt, die G_i sind Polynome in den Produkten u_iv_j ,

$$G_i = F_i(\ldots,u_iv_j,\ldots).$$

Dann gilt aber

$$\varphi(X) = \{w\in\mathrm{Im}(\varphi) \mid F_i(w) = 0,\ i = 1,\ldots,t \},$$

d.h. die F_i definieren zusammen mit den Gleichungen von $\mathrm{Im}(\varphi)$ gerade die Menge $\varphi(X)$, d.h. X ist abgeschlossen.
QED.

(h) Die abgeschlossenen Mengen im $\mathbb{P}^m\times\mathbb{A}^n$

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^m\times\mathbb{A}^n$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind äquivalent:

(i) X ist abgeschlossen.

(ii) X ist in $\mathbb{P}^m\times\mathbb{A}^n$ gegeben durch Gleichungen der Gestalt

$$G_i(u_0,\ldots,u_m;v_1,\ldots,v_n) = 0 \quad (i=1,\ldots,t),$$

wobei die $G_i\in k[u,v]$ homogen sind als Polynome in den u_i .

Beweis. Die Argumentation ist so ähnlich wie beim Beweis von (g).
QED.

5.5.2 Abgeschlossenheit des Bildes einer projektiven Varietät

(a) Vorbemerkung

Das Bild einer affinen abgeschlossenen Menge bei einer regulären Abbildung braucht keine abgeschlossene Menge zu sein,

$$X \subseteq A^m \text{ abgeschlossen, } f: A^m\to A^n \not\Rightarrow f(X) \subseteq A^n \text{ abgeschlossen.}$$

Wir zeigen jetzt, in dieser Beziehung unterscheiden sich die projektiven Varietäten grundsätzlich von den affinen.

(b) Theorem 2 (Abgeschlossenheit des Bildes einer projektiven Varietät)

Das Bild einer projektiven Varietät bei einer regulären Abbildung ist abgeschlossen.

Zum Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen.

---

[64] $|\alpha| = \alpha_0+\ldots+\alpha_m$ für $\alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_m)$

(c) Definition: der Graph einer Abbildung

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung von quasi-projektiven Varietäten. Dann heißt die Menge

$$\Gamma_f := \{(x,f(x)) \mid x\in X\}$$

Graph von f.

(d) Abgeschlossenheit des Graphen

Der Graph einer regulären Abbildung $f:X\to Y$ ist abgeschlossen in $X\times Y$.

Beweis. 1. Schritt: Reduktion auf den Fall $Y = P^n$.

Sei $Y \subseteq P^n$. Dann gilt

$$X\times Y \subseteq X\times\mathbb{P}^n$$

und f definiert eine Abbildung $\tilde{f}: X \to P^n$. Außerdem ist

$$\Gamma_f = (X\times Y)\cap\Gamma_{\tilde{f}} .$$

Es reicht also zu zeigen, $\Gamma_{\tilde{f}}$ ist abgeschlossen in $X\times\mathbb{P}^n$.

2. Schritt. Wir betrachten die reguläre[65] Abbildung

$$g := f\times id: X\times\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n, (x,y) \mapsto (f(x), y).$$

Es gilt

$$\Gamma_{id} = \{(x,x) \mid x\in\mathbb{P}^n\}$$

$$\Gamma_f = g^{-1}(\Gamma_{id})$$

Das Urbild einer abgeschlossenen Menge bei einer regulären Abbildung ist abgeschlossen. Es reicht also zu zeigen,

$$\Gamma_{id} \subseteq P^n\times P^n$$

ist abgeschlossen. Das ist aber der Fall wegen[66]

$$\Gamma_{id} = \{(u,v)\in P^n\times P^n \mid u_iv_j - u_jv_i = 0 \text{ für alle i und alle j}\}.$$

QED.

(e) Beweis von Theorem (b)

Sei

$$f: X \to Y$$

eine reguläre Abbildung mit einer projektiven Varietät X. Wir betrachten die Projektion

$$p: X\times Y\to Y, (x,y) \mapsto y.$$

Es gilt

$$f(X) = p(\Gamma_f).$$

Die Abgeschlossenheit von f(X) folgt deshalb aus der nachfolgenden Aussage.

(f) Theorem 3 (Abgeschlossenheit der Projektion)

Seien X eine projektive Varietät und Y eine quasi-projektive Varietät. Dann überführt die reguläre Abbildung

$$p: X\times Y \to Y, (x,y) \mapsto y,$$

---

[65] Es reicht, die Regularität lokal zu überprüfen, d.h. für den Fall, daß beide Faktoren affin sind. Dann ist die Regularitätsaussage aber trivial.

[66] d.h. Γ_{id} ist Nullstellenmenge eines bihomogenen Gleichungssystems.

abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen.

Beweis. 1.Schritt. Reduktion auf den Fall $X = \mathbb{P}^m$.
Sei $X \subseteq \mathbb{P}^m$ abgeschlossen. Dann ist p die Komposition

$$X\times Y \hookrightarrow \mathbb{P}^m\times Y \to Y$$

und es reicht, die Behauptung für $\mathbb{P}^m\times Y \to Y$ zu beweisen.
2. Schritt. Reduktion auf den Fall Y affine Varietät.
Wir überdecken Y durch offfene affine Mengen,

$$Y = \cup\, U_\alpha.$$

Es reicht zu zeigen, für $Z \subseteq \mathbb{P}^m\times Y$ abgeschlossen ist

$f(Z)\cap U_\alpha$ ist abgeschlossen in U_α .

Wegen $f(Z)\cap U_\alpha = f(Z\cap(\mathbb{P}^m\times U_\alpha))$ reicht es also den Fall $Y = U_\alpha$ affin zu betrachten.

3.Schritt. Reduktion auf den Fall $Y = \mathbb{A}^m$.
Ist $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ abgeschlossen, so ist

$$\mathbb{P}^m\times Y \subseteq \mathbb{P}^m\times A^m \qquad (\longrightarrow \mathbb{A}^m)$$

abgeschlossen. Es reicht also die Abgeschlossenheit der Projektion

$$\mathbb{P}^m\times\mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$$

zu beweisen.
4. Schritt. Abgeschlossenheit von $p:\mathbb{P}^m\times\mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$.
Eine abgeschlossene Menge

$$Z \subseteq \mathbb{P}^m\times\mathbb{A}^m$$

ist eine Menge, die durch Gleichungen der Gestalt

$$g_i(u,y) = 0, \quad i=1,\dots,t,$$

definiert ist mit g_i homogen in den Unbestimmten u. Für $y_0\in\mathbb{A}^m$ besteht

$$p^{-1}(y_0)$$

aus allen nicht-trivialen Lösungen im $\mathbb{P}^m$ des Gleichungssystems

$$g_i(u,y_0) = 0, \quad i=1,\dots,t, \tag{1}$$

Es gilt also

$y_0 \in p(Z) \Leftrightarrow$ das System (1) hat eine nicht-triviale Lösung

$$\Leftrightarrow I_s \ntrianglelefteq (g_1(u,y_0),\dots,g_t(u,y_0)) \text{ für } s = 1,2,3,\dots$$

Wir setzen

$T_s := \{y_0\in A^m \mid I_s \ntrianglelefteq (g_1(u,y_0),\dots,g_t(u,y_0))\}$

Dann gilt

$p(Z) = \cap_{s=1}^{\infty} T_s$

Es reicht also zu zeigen:
5. Schritt. Abgeschlossenheit der Menge T_s .
Wir setzen

$$k_i := \deg_u g_i(u,y).$$

Seien

$$M^{(1)},\dots,M^{(a)}$$

die Potenzprodukte des Grades s in den Unbestimmten u.

Die Bedingung $I_s \subseteq (g_1(u,y_0),...,g_t(u,y_0))$, bedeutet dann, alle $M^{(\alpha)}$ liegen im Ideal, das von den $g_i(u,y_0)$ erzeugt wird,

$$M^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{t} g_i(u,y_0)F_{i,\alpha}(u) \tag{2}$$

Durch Vergleich der homogenen Komponenten im Grad s sehen wir, daß wir die Faktoren $F_{i,\alpha}(u)$ durch ihre homogenen Komponenten des Grades $s\text{-}k_i$ ersetzen können, ohne daß die Gültigkeit der Relationen (2) verloren geht. Wir können also annehmen,

$$F_{i,\alpha}(u) \text{ ist homogen vom Grad } s - k_i$$

Seien jetzt

$$N_i^{(1)}, \ldots , N_i^{(b_i)}$$

die Potenzprodukte des Grades $s\text{-}k_i$. Die Relationen (2) bedeuten dann, die $M^{(\alpha)}$ sind k-Linearkombinationen der homogenen Polynome

$$g_i(u,y_0)N_i^{(\beta)}\ , \ i=1,...,t,\ \beta=1,\ldots,b_i\ . \tag{3}$$

Das bedeutet natürlich, die Formen erzeugen den gesamten Vektorraum der Formen des Grades s. Beschreibt man die Vektoren (3) durch irgentwelche Koordinaten, so bedeutet dies für die Matrix der Koordinaten, daß diese maximalen Rang besitzt, d.h. daß eine Determinante, die von $y_0 \in A^m$ abhängt, ungleich Null wird. Mit anderen Worten, es gibt Polynome $P_1,...,P_c$ mit der Eigenschaft

$$P_i(y_0) \neq 0 \text{ für ein } i \Leftrightarrow y_0 \notin T_s\ .$$

Also ist $T_s = V(P_1,...,P_c)$ abgeschlossen.

QED.

(g) Folgerung 1 (Satz von Liouville)

Sei X eine irreduzible projektive Varietät. Dann gilt

$$\Gamma(\mathcal{O}_X) = k,$$

d.h. jede allen Punkten von X reguläre Funktion ist konstant auf X.

Beweis. Sei $f \in k[X]$. Wir fassen f als reguläre Abbildung

$$X \to \mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^1,\ x \mapsto f(x) \mapsto [1,f(x)],$$

auf. Wie eben gezeigt, ist $f(X) \subseteq \mathbb{P}^1$ abgeschlossen. Wegen $f(X) \subseteq \mathbb{A}^1$ gibt es nur die Möglichkeiten

1. $f(X) = A^1$
2. $f(X)$ = endliche Teilmenge des A^1.

Der ersten Fall kann nicht eintreten, da A^1 nicht abgeschlossen ist im P^1. Also tritt der zweite Fall ein,

$$f(X) = \{a_1,...,a_r\}.$$

Nun ist

$$X = f^{-1}(a_1) \cup ... \cup f^{-1}(a_r)$$

eine Zerlegung von X in disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Weil X irreduzible ist, folgt r = 1, d.h. f ist konstant.
QED.

(h) Folgerung 2 (Bilder projektiver Varietäten im affinen Raum)

Sei f: X → Y eine reguläre Abbildung mit X projektiv und Y affin. Dann isf f auf jeder irreduziblen Komponente von X konstant.
Beweis. Nach (g) sind die Koordinatenfunktionen von f auf jeder Komponente von X konstant.
QED.

(i) Proposition (Irreduzible Hyperflächen bilden eine offene Menge)

Die Menge aller Punkte $\xi \in \mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$, zu denen eine reduzible Hyperfläche im $\mathbb{P}^n$ gehört, ist abgeschlossen im $\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$ (vgl. 5.4.4(b)).

Bemerkung
Die Behauptung besagt, die Reduzibilität eines homogenen Polynoms kann man durch ein polynomiales Gleichungssystem ausdrücken für die Koeffizienten des Polynoms.
Im Fall m = n = 2 ist dies wohlbekannt:

$$F = \sum_{i=0}^{2} a_{ij} U_i U_j \text{ ist genau dann reduzibel, wenn gilt } \det(a_{ij}) = 0.$$

Beweis. Bezeichne F_ξ das homogene Polynom, dessen Koeffizienten gerade die Koordinaten des Tupels ξ sind und $\xi(F)$ das Tupel der Koeffizienten des homogenen Polynoms F. Wir setzen

$$X := \{\xi \in \mathbb{P}^{\nu_{n,m}} \mid F_\xi \text{ reduzibel }\}$$

$$X_k := \{\xi \in \mathbb{P}^{\nu_{n,m}} \mid F_\xi \text{ hat einen Teiler vom Grad k }\}$$

Dann gilt

$$X = \cup X_k$$

und es genügt zu zeigen, die X_k sind abgeschlossen. Wir betrachten die Abbildung

$$f: P^{\nu_{n,k}} \times P^{\nu_{n,m-k}} \to P^{\nu_{n,m}},\ ([a], [b]) \mapsto [\xi(F_a \cdot F_b)].$$

Dies ist eine reguläre Abbildung (da die Koeffizienten des Produkts $F_a \cdot F_b$ in polynomialer Weise von den Koeffizienten der Faktoren abhängen)[67]. Das Bild dieser Abbildung ist abgeschlossen (da das direkte Produkt links projektiv ist) und stimmt mit der Menge X_k überein.
QED.

---

[67] Und $F_a \cdot F_b$ nur dann Null ist, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

5.5.3 Endliche Abbildungen

(a) Endliche Ringerweiterungen

Sei $A \subseteq B$ ein Teilring des Rings B. Ein Element $b\in B$ heißt ganz über A, wenn es einer normierten algebraischen Gleichung[68] mit Koeffizienten aus A genügt:

$$f(b) = 0 \text{ mit } F(T) := T^n + a_1\cdot T^{n-1} + ... + a_n = 0 \text{ und } a_i\in A.$$

Der Ring B heißt ganz über A, wenn jedes seiner Elemente es ist.

Bemerkungen

(i) $b\in B$ ganz über A $\Leftrightarrow$ $A[b] \subseteq B$ ist ein Faktorring von

$$A[T]/(f) = A\cdot 1 + A\cdot T + ... + A\cdot T^{n-1}$$

$\Leftrightarrow$ A[b] ist als A-Modul endlich erzeugt.

(ii) Für endlich erzeugte A-Algebren $B = A[b_1,...,b_r]$ gilt:

B ganz über A $\Leftrightarrow$ b_i ist ganz über A für jedes i

$\Leftrightarrow$ B ist als A-Modul endlich erzeugt.

(b) Endliche Morphismen affiner Varietäten

Sei $f: X\to Y$ eine dominante[69] reguläre Abbildung affiner Varietäten. Dann heißt f endlich, wenn k[X] ganz ist über dem Teilring f*k[X].

Bemerkungen

(i) Die Komposition endlicher Abbildungen ist endlich.

(ii) Die reguläre Abbildung

$$X = V(xy - 1) \to A^1, (x,y) \mapsto x,$$

ist nicht endlich, denn $k[X] = k[x,y]/(xy-1) = k[x,x^{-1}]$ ist kein endlich erzeugter Modul über k[x].

(iii) Für jede endliche Abbildung $f:X\to Y$ sind die Fasern $f^{-1}(y)$ über jedem Punkt $y\in Y$ endlich.

(iv) Die Endlichkeit eines Morphismus $f:X\to Y$ bedeutet, daß die Punkte von $f^{-1}(y)$ im Endlichen bleiben, wenn y auf Y variiert. Die Punkte der Faser können verschmelzen, aber sie können nicht (im Unendlichen) verschwinden.

Beweis von (iii). Sei $X \subseteq A^n$. Dann sind die Koordinatenfunktionen

$$x_i = T_i|_X \in k[X]$$

endlich über f*k[Y], d.h. für jedes i genügt x_i einer Gleichung der Gestalt

$$x_i^n + f^*(a_1)x_i^{n-1} + ... + f^*(a_n) = 0 \text{ mit } a_i\in k[Y].$$

Für jeden Punkt $p\in X$ mit festem Bild $f(p) = y$ gilt also

$$x_i(p)^n + a_1(y)x_i(p)^{n-1} + ... + a_n(y) = 0.$$

Für festes y hat diese Gleichung nur endliche viele Lösungen $x_i(p)$, d.h. für die i-te Koordinaten eines Punktes aus $f^{-1}(y)$ kommen nur endlich viele Werte in Frage.

QED.

---

[68] Manchmal werden wir die Relation auch Ganzheitsgleichung nennen.

[69] d.h. das Bild von f liegt dicht in Y, sodaß die induziere Abbildung der Koordinatenringe

$$f^*: k[Y] \longrightarrow k[X]$$

injektive ist, d.h. man kann k[X] als Teilalgebra von k[Y] betrachten.

(c) Theorem 4 (Surjektivität endlicher Abbildungen)

Jede endliche Abbildung $f:X\to Y$ affiner Varietäten ist surjektiv.

Beweis. Sei $y\in Y$ und sei

$$m_y := \{f\in k[Y] \mid f(y) = 0\}$$

das Ideal von $\{y\}$ in $k[Y]$. Sind $y_1,\dots,y_n$ Koordinatenfunktionen auf Y und hat y die i-te Koordinaten a_i , so gilt

$$m_y \supseteq (y_1 - a_1,\dots,y_n - a_n)$$

und rechts steht ein maximales Ideal, d.h. es gilt "=". Die Faser $f^{-1}(y)$ ist als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen. Bestimmen wir also definierende Gleichungen der Faser. Es gilt

$$x \in f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow \alpha(f(x)) = 0 \text{ für alle } \alpha\in m_y$$

$$\Leftrightarrow^{70} x\in V(\alpha^*(f) \mid \alpha\in m_y)$$

Da $f^*: k[Y]\to k[X]$ injektiv ist, können wir $k[Y]$ mit seinem Bild in $k[X]$ identifizieren und f^* im folgenden weglassen. Dann sind die Elemente von m_y definierende Gleichungen von $f^{-1}(y)$ und das von ihnen erzeugte Ideal ein definierendes Ideal:

$$f^{-1}(y) = V(m_y\cdot k[X]).$$

Nach dem Nullstellensatz gilt

$$f^{-1}(y) = \varnothing \Leftrightarrow 1\in m_y\cdot k[X].$$

Das nachfolgende Lemma besagt gerade, daß dieser Fall nicht eintritt.
QED.

(d) Lemma: Erweiterungsideale bei ganzen Erweiterungen

Seien B ein kommutativer Ring mit 1, $A \subseteq B$ ein Teilring und $I \subseteq A$ ein Ideal. Wir nehmen an, B ist als A-Modul endlich erzeugt. Dann besteht im Implikation

$$I \ne A \Rightarrow IB \ne B.$$

Beweis. Sei $b_1,\dots,b_n$ ein Erzeugendensystem von B als A-Modul,

$$B = Ab_1 + \dots + Ab_n.$$

Angenommen es gilt $IB = B$. Dann ist

$$B = Ib_1 + \dots + Ib_n,$$

d.h. jedes b_i läßt sich in der Gestalt

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j \text{ mit } a_{ij}\in I.$$

schreiben. Es folgt für jedes i,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij})b_j$$

also nach dem Entwicklunssatz für Determinanten

$$db_i = 0 \text{ mit } d = \det(a_{ij} - \delta_{ij})$$

also $d\cdot B = 0$, also $d\cdot 1=0$, also

---

[70] Für $M\subseteq k[X]$ sei $V(M) = \{x\in X \mid f(x) = 0 \text{ für } f\in M\}$

$$0 = d = \det(a_{ij} - \delta_{ij}).$$

also

$$0 \equiv \det(- \delta_{ij}) \bmod I$$

also $1\in I$, im Widerspruch zur Voraussetzung $I \ne A$.
QED.

(e) Aufgabe

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung affiner Varietäten, $g\in k[Y]$ und

$$D(g) = \{y\in Y \mid g(y) \ne 0\}$$

die durch g definierte offene Hauptmenge. Man zeige,

1. $k[D(g)] = k[Y][1/g]= k[Y]_g$
2. $f^{-1}(D(g)) = D(g^*(f))$.
3. Ist $f:X\to Y$ endlich, so auch die Einschränkung $D(g°f)\to D(g)$ von f.

(e) Theorem 5 (Lokalität der Endlichkeit)

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung von affinen Varietäten. Für jeden Punkt $y\in Y$ gebe es eine affine Umgebung $V\subseteq Y$ mit der Eigenschaft, daß $U:= f^{-1}(V)$ affin und die Einschränkung

$$f|_U : U \to V \text{ endlich}$$

ist. Dann ist f endlich.
Beweis. Wir setzen

$$B := k[X]$$
$$A := k[Y]$$

Wir können annehmen die offenen Mengen U in der Formulierung des Theorems sind offene Hauptmengen und wir wählen eine Überdeckung von Y durch solche offene Hauptmengen:

$$Y = \cup_{\alpha\in I}D(g_\alpha) \qquad , g_\alpha\in k[Y] \tag{1}$$

<u>Bemerkung</u>. Diese Relation ist äquivalent zu,

$$V(g_\alpha \mid \alpha\in I) = \cap_{\alpha\in I}V(g_\alpha) = \emptyset,$$

d.h. das von den g_α erzeugte Ideal von k[Y] ist der ganze Ring,

$$1\in(g_\alpha \mid \alpha\in I)$$

Nun ist 1 bereits Linearkombination von endlich vielen g_α, d.h. wir können annehmen, die Überdeckung (1) ist endlich.
Nach Voraussetzung ist

$$f^{-1}(D(g_\alpha)) = D(g_\alpha\circ f)$$

endlich über $D(g_\alpha)$ für jedes α,

$$k[D(g_\alpha\circ f)] = B[1/g_\alpha]$$

ist eine endliche Algebra über

$$k[D(g_\alpha)] = A[1/g_\alpha].$$

Für jedes α können wir ein endliches Erzeugendensystem von $B[1/g_\alpha]$ über $A[1/g_\alpha]$ finden,

$$B[1/g_\alpha] = A[1/g_\alpha]b_{1,\alpha} + ... + A[1/g_\alpha]b_{n_\alpha,\alpha} .$$

Durch Multiplikation mit einer Potenz der Einheit g_α erreichen wir,

$$b_{i,\alpha} \in B$$

für jedes i und jedes α.

Nach Konstruktion kann man jedes Element b∈B in der folgenden Gestalt schreiben.

$$b = \sum_{i=1}^{n_i} (a_{i,\alpha}/g_\alpha^{m_\alpha})\cdot b_{i,\alpha} \text{ mit } a_{i,\alpha}\in A .$$

Wegen (1) haben die $g_\alpha^{m_\alpha}$ keine gemeinsame Nullstelle auf Y, d.h. das von ihnen erzeuget Ideal enthält die 1,

$$1 = \sum_\alpha h_\alpha\cdot g_\alpha^{m_\alpha} \text{ mit } h_\alpha\in A.$$

Damit gilt

$$b = b\bullet\sum_\alpha h_\alpha\bullet g_\alpha^{m_\alpha} = \sum_i \sum_\alpha h_\alpha\bullet g_\alpha^{m_\alpha}\bullet (a_{i,\alpha}/g_\alpha^{m_\alpha})\bullet b_{i,\alpha} = \sum_i \sum_\alpha h_\alpha\bullet a_{i,\alpha}\bullet b_{i,\alpha},$$

d.h. die $b_{i,\alpha}$ erzeugen B über A.

QED.

(f) Definition: Endliche Morphismen quasi-projektiver Varietäten

Eine reguläre Abbildung f:X→Y quasi-projektiver Varietäten heißt endlich, wenn jeder Punkt y∈Y eine affine Umgebung V⊆Y besitzt, sodaß

$$U := f^{-1}(V)$$

affin ist und die durch f induzierte reguläre Abbildung affiner Varietäten U→V endlich ist.

Bemerkungen

(i) Die Fasern jeder endlichen Abbildung sind endlich (nach A.5.3(b)(iii)).
(ii) Jede endliche Abbildung ist surjektiv (nach A.5.3(c)).
(iii) Das nachfolgende Ergebnis ist eine Konsequenz der Eigenschaften endlicher Abbildungen.

(g) Theorem 6 (Das Bild dominanter Morphismen)

Sei f: X→Y eine reguläre dominante Abbildung. Dann enthält f(X) eine nicht-leere offene Teilmenge von Y.

Beweis. O.B.d.A. seien Y und X irreduzible affine Varietäten.[71] Weil f dominant ist, gilt

$$k[Y] \subseteq k[X], \alpha \mapsto f^*(\alpha).$$

Sei r der Transzendenzgrad der Körpererweiterung

$$k(Y) \subseteq k(X).$$

Wir wählen r algebraisch unabhängige Elemente über k(Y),

[71] Wir können Y zunächst durch eine nicht-leere affine offene Teilmenge ersetzen und X durch deren Urbild. Danach können wir Y durch eine irreduzibele Kompoente von Y und X durch deren Urbild ersetzen.

$$u_1, \dots, u_r \in k[X].$$

Dann gilt

$$k[Y] \subseteq k[Y][u_1, \dots, u_r] \subseteq k[X]$$

und

$$k[Y][u_1, \dots, u_r] = k[Y \otimes_k k[u_1, \dots, u] = k[Y \times \mathbb{A}^r] .$$

Die Inklusion der Koordinatenringe induziert eine Zerlegung des Morphismus f,

$$f: X \xrightarrow{h} Y \times A^r \xrightarrow{g} Y .$$

Dabei ist g einfach die Projektion auf den ersten Faktor.

Nach Konstruktion ist jedes Element $v \in k[X]$ algebraisch über $k[Y \times A^r]$, d.h. es gibt ein Element $a \in k[Y \times A^r] - \{0\}$ derart, daß $a \cdot v$ ganz ist über $k[Y \times A^r]$. Wir lassen jetzt v ein Erzeugendensystem

$$v_1, \dots, v_m \in k[X]$$

des Rings k[X] (über k) durchlaufen und bezeichnen mit

$$a_1, \dots, a_m \in k[Y \times A^r] - \{0\}$$

zugehörige Elemente a. Sei

$$F = a_1 \cdot \ldots \cdot a_m .$$

Auf der offenen Menge

$$D(F) \subseteq Y \times A^r$$

ist jede der Funktionen a_i umkehrbar, d.h. wir können die Ganzheitsgleichung von $a_i v_i$ durch eine Potenz von a_i teilen und so eine Ganzheitsgleichung für v_i gewinnen. Mit anderen Worten, die Abbildung h induziert eine endliche Abbildung

$$D(F \circ h) = h^{-1}(D(F)) \to D(F).$$

Als endliche Abbildung ist diese Abbildung surjektiv, d.h. es gilt

$$D(F) \subseteq h(X)$$

also

$$g(D(F)) \subseteq g(h(X)) = \mathrm{Im}\, f.$$

Es reicht also zu zeigen, g(D(F)) enthälte eine offene Teilmenge von Y. Wir schreiben die Funktion $F \in k[Y \times A^r]$ in der Gestalt

$$F(y,T) = \sum_\alpha F_\alpha(y) \cdot T^\alpha$$

mit Potenzprodukten T^α der Unbestimmten $T_1, \dots, T_r$ und Funktionen $F_\alpha \in k[Y]$. Für jeden Punkt $y \in Y$, in welchem nicht sämtliche $F_\alpha(y)$ Null sind, gibt es $T_i = \tau_i$ mit $F(y,\tau) \neq 0$, d.h. es gilt

$$y \in g(D(F)).$$

Es folgt

$$g(D(F)) \supseteq \cup D(F_\alpha)$$

Da nicht sämtliche F_α Null sind, steht rechts eine nicht-leere offene Menge von Y.

QED.

Bemerkung

Der letzte Satz zeigt, daß sich reguläre Abbildungen um einiges einfacher verhalten als stetige oder differenzierbare Abbildungen. Situationen wie bei der irrationalen Abwicklung des Torus,

$$f: R \to (R/Z)^2,\ r \mapsto (r, \sqrt{2}\cdot r) \bmod Z^2,$$

können hier nicht auftreten.

(h) Theorem 7 (Endlichkeit von Projektionen)

Seien $E \subseteq P^n$ ein linearer Unterraum der Dimension d und

$$X \subseteq \mathbb{P}^n - E$$

eine abgeschlossene Menge. Dann induziert die Projektion mit dem Zentrum E (vgl. 5.4.4 (a)),

$$\pi: X \to \mathbb{P}^{n-d-1}$$

eine endliche Abbildung $X \to \pi(X)$.

Beweis. Wir schreiben die Projektion π in der Gestalt

$$\pi: X \to P^{n-d-1},\ [x] \mapsto [L_0(x),\dots,L_{n-d-1}(x)],$$

mit k-linear unabhängigen Linearformen $L_i(S)$. Sei

$$U_i := \pi^{-1}(D(S_i)) = \{x \in X \mid L_i(x) \neq 0\}.$$

Dies ist eine affine offene Teilmenge von X. Es reicht zu zeigen, die durch π induzierten Abbildungen

$$\pi_i := \pi|_{U_i}: U_i \to D(S_i)$$

sind endlich. Sei $g \in k[U_i]$ beliebig. Wir haben zu zeigen, g genügt einer Ganzheitsgleichung über $k[D(S_i)]$. Dazu schreiben wir g in der Gestalt

$$g = \frac{G}{L_i^m} \text{ mit G homogen vom Grad m.}$$

Wir betrachten die reguläre Abbildung

$$\pi_1: X \to P^{n-d},\ x \mapsto [L_0^m(x),\dots,L_{n-d-1}^m(x),G(x)].$$

Da X projektiv ist, ist das Bild dieser Abbildung abgeschlossen, sagen wir

$$\pi_1(X) = V(F_1,\dots,F_s).$$

Nach Voraussetzung haben die Formen L_i keine gemeinsame Nullstelle auf X. Deshalb liegt der Punkt

$$[0,\dots,0,1] \notin \pi_1(X)$$

nicht im Bild von π_1. Anders ausgedrückt, es gilt

$$V(z_0,\dots,z_{n-d-1},F_1,\dots,F_s) = \emptyset.$$

Nach dem Nullstellensatz bedeutet dies,

$$I_k \subseteq (z_0,\dots,z_{n-d-1},F_1,\dots,F_s) \text{ für ein k,}$$

und insbesondere

$$z_{n-d}^k \in (z_0,\dots,z_{n-d-1},F_1,\dots,F_s).$$

Wir schreiben

$$z_{n-d}^k = \sum_{j=0}^{n-d-1} z_j\cdot H_j + \sum_{j=1}^{s} F_j\cdot P_j \tag{1}$$

mit Polynomen H_j und P_j. Wir können dabei annehmen die H_j sind homogen vom Grad k-1 und die P_j sind homogen vom Grad k - deg F_j. Wir setzen

$$\Phi(z_0,...,z_{n-d}) := z_{n-d}^k - \sum_{j=0}^{n-d-1} z_j \cdot H_j$$

Dies ist ein normierten Polynom in z_{n-d}.Wegen (1) gilt

$$\Phi = 0 \text{ auf } \pi_1(X).$$

Wir setzen in diese Identität die Koordinatenfunktionen der Abbildung π_1 und erhalten,

$$\Phi(L_0^m,...,L_{n-d-1}^m,G) = 0 \text{ auf } X.$$

Auf U_i ist $L_i \ne 0$. Wir können durch $L_i^{m\cdot k}$ teilen und erhalten auf U_i :

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(\left(\frac{L_0(x)}{L_i(x)}\right)^m,...,1,...,\left(\frac{L_{n-d-1}(x)}{L_i(x)}\right)^m,g) \\ &= \Phi(\pi^*(z_0)^m,...,1,...,\pi^*(z_{n-d-1})^m,g) \end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Ganzheitsgleichung für $g\in k[U_i]$ über

$$\pi^*k[D(S_i)] = \pi^*k[z_0,...,\hat{z}_i,...,z_{n-d-1}]$$

QED.

(i) Theorem 8 (Endlichkeitskriterium für allgemeine Abbildungen)

Seien $F_0,...,F_s\in k[S]$ über k linear unabhängige homogene Polynome des Grades m, welche keine gemeinsame Nullstelle auf der abgeschlossenen Teilmenge

$$X \subseteq \mathbb{P}^n$$

besitzen. Dann ist

$$\varphi: X \to \varphi(X),\ [x] \mapsto [F_0(x),...,F_s(x)],$$

eine endliche Abbildung.

Beweis. Sei v: $P^n \to P^{\nu_{n,m}}$ die Veronese-Abbildung und L_i die Linearform auf $P^{\nu_{n,m}}$ mit denselben Koeffizienten wie F_i ,

$$F_i = v^*(L_i).$$

Weiter sei

$$p: \mathbb{P}^{\nu_{n,m}} \to \mathbb{P}$$

die durch die L_i definierte Projektion. Dann ist φ gerade die Zusammensetzung

$$X \subseteq \mathbb{P}^n \xrightarrow{v} \mathbb{P}^{\nu_{n,m}} \xrightarrow{p} \mathbb{P}.$$

Da die Veronese-Abbildung einen Isomorphismus $\mathbb{P}^n \to \mathrm{Im}(v)$ induziert, folgt die Behauptung aus der entsprechenden Aussage für p, d.h. aus Theorem (h).

QED.

(j) Grad einer endlichen Abbildung

Sei h: Y → X eine endliche separable[72] Abbildung irreduzibler Varietäten. Dann gibt es eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subseteq X$ derart, daß die Fasern über den Punkten von U aus genau

$$\deg h := [k(X):k(Y)]$$

Punkten bestehen. Diese Zahl heißt Grad der Abbildung h.

Beweis. Wir können annehmen, X und Y sind affin. Dann ist

$$B := k[Y] \text{ ganz über } A := k[X]$$

und

$$L := k(Y) \text{ endliche separable Körpererweiterung von } K := k(X).$$

Nach dem Satz vom primitiven Element ist

$$L = K[T]/(f(T))$$

mit einem irreduziblen Polynom $f \in K[T]$. Das Polynom f ist außerdem separabel, d.h. f und die Ableitung f' von f sind teilerfremd,

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot f' = 1 \text{ in } K[T]$$

mit Polynomen $\alpha, \beta \in K[T]$. Wir können X durch eine affine Teilmenge ersetzen und damit annehmen,

$$f, f', \alpha, \beta \in A[T].$$

Sei t die Restklasse von T in L. Dies ist eine rationale Funktion auf Y. Auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge Y-Z ist sie regulär. Z ist abgeschlossen und von kleinerer Dimension als Y. Also ist X-f(Z) nicht leer.Wir ersetzen X durch eine affine offene Teilmenge von X-f(Z) (und Y durch deren Urbild) und erreichen auf diese Weise,

$$t \in k[Y]$$

ist regulär auf Y. Damit gilt

$$A[t] \subseteq B$$

und, weil B endlich ist über A,

$$B = A \cdot b_1 + \ldots + A \cdot b_r.$$

Wegen $b_i \in L = K[t]$ hat b_i die Gestalt $b_i = \alpha_i/a$ mit $\alpha_i \in A[t]$ und $a \in A$. Wir ersetzen X durch die offene Hauptmenge D(a) und erreichen, daß sämtliche b_i bereits in A[t] liegen, d.h. es gilt

$$A[t] = B.$$

Sei d = deg h (= deg f). Dann gilt

$$B = A \cdot 1 + A \cdot t + A \cdot t^2 + \ldots + A \cdot t^{d-1}$$

und

$$L = K \cdot 1 + K \cdot t + K \cdot t^2 + \ldots + K \cdot t^{d-1}.$$

Die ersten d-1 Potenzen von t sind über K linear unabhängig, d.h. B ist ein freier A-Modul und es gilt

$$B \cong A[T]/(f).$$

Sei jetzt

$$X = V(g_1, \ldots, g_r) \subseteq \mathbb{A}^N$$

Dann können wir B = k[Y] in der Gestalt

$$k[Y] = k[T_1, \ldots, T_N, T]/(I(X), \tilde{f})$$

---

[72] d.h. k(X)/k(Y) ist eine separable Körpererweiterung.

schreiben mit einem Polynom $\tilde{f}$, dessen Koeffizienten gerade die Koeffizienten von f auf $\mathbb{A}^N$ fortsetzen, d.h.

$$Y = V(g_1,...,g_r, \tilde{f}) \subseteq A^{N+1}$$

und h ist gerade die Abbildung

$$h: Y \to X, (x_1,...,x_N) \mapsto (x_1,...,x_{N+1})$$

Es reicht zu zeigen, die Fasern

$$h^{-1}(a) = \{ (a, b) \in A^{N+1} \mid \tilde{f}(a,b) = 0 \}$$

bestehen aus genau d Punkten für jedes $a \in Y$. Mit anderen Worten, wir haben zu zeigen, für $a \in Y$ hat das Polynom

$$\tilde{f}(a, T) \in k[T].$$

d verschiedene Nullstellen. Nach Konstruktion von $\tilde{f}$ gilt aber

$$f(a, T) = \tilde{f}(a, T),$$

wenn man $f \in A[T] = k[Y][T]$ als Funktion auf $Y \times A^1$ auffaßt. Es reicht also zu zeigen, das Polynom d-ten Grades

$$f(a, T) \in k[T]$$

hat für jedes $a \in Y$ keine mehrfachen Nullstellen. Nun gilt aber

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot f' = 1 \text{ in } A[T]$$

also

$$\alpha(a, T) \cdot f(a, T) + \beta(a, T) \cdot f'(a, T) = 1 \text{ in } k[T],$$

d.h. $f(a, T)$ und $f'(a,T)$ sind für jedes $a \in Y$ teilerfremd und es treten tatsächlich keine mehrfachen Nullstellen auf.

QED.

Bemerkungen

(i) Im allgemeinen ist der Grad einer endlichen Abbildung keine obere Schranke für die Anzahl der Punkte in einer Faser. Seien zum Beispiel

$$X = A^1$$
$$Y = V(x^2 + x^3 - y^2)$$

und[73]

$$f: X \to Y , t \mapsto (t^2 - 1 , t^3 - t).$$

Die Faser von f über $(x,y) \neq (0,0)$ besteht aus dem einzigen Punkt $\frac{y}{x}$. Über (0,0) besteht die Faser aus den Punkten $t = +1$ und $t = -t$.

Die induzierte Abbildung der Koordinatenringe hat die Gestalt

$$k[t] \leftarrow k[x,y]/(x^2 + x^3 - y^2), t^2 - 1 \leftarrow\!\shortmid x, t^3 - t \leftarrow\!\shortmid y.$$

Sie identifiziert k[Y] mit dem Teilring

$$k[t^2 - 1, t^3 - t] \subseteq k[t].$$

Der Quotientenring des letzteren Rings enthält t, ist also gleich k(t), d.h. es gilt

$$\deg f = [k(X):k(Y)] = [k(t):k(t)] = 1.$$

(ii) Die Ungleichung

$$\# f^{-1}(y) \leq \deg f$$

ist richtig für endliche Abbildungen, wenn der Koordinatenring von Y normal[74] ist.

---

[73] $x^2 + x^3 = x^2(1 + x) = (t^2 - 1)^2 t^2 = (t^3 - t)^2 = y^2$

5.5.4 Normalisierungssätze

(a) Theorem 9 (Projektive Varietäten als endl. Überlagerungen des P^n)
Für jede irreduzible projektive Varietät X gibt es eine endliche Surjektion der Gestalt

$$X \to \mathbb{P}^n.$$

Beweis. Sei $X \subseteq P^m$ abgeschlossen. Falls "=" gilt, ist nichts zu beweisen. Sei die Inklusion also echt. Wir wählen einen Punkt

$$x \in P^m - X$$

und betrachten die Projektion mit dem Zentrum x,

$$\varphi: X \to \mathbb{P}^{m-1}.$$

Dies ist nach A.5.5.3 (h) eine endliche Abbildung auf das Bild $\varphi(X)$, welches abgeschlossen ist im $\mathbb{P}^{m-1}$ (nach 5.5.1 (b)). Falls $\varphi(X) = P^{m-1}$ ist, so folgt die Behauptung, falls nicht, so wiederholen wir die Argumentation mit $\varphi(X)$ anstelle von X.
QED.

(b) Theorem 10 (Affine Varietäten als endliche Überlagerungen des A^n)
Für jede irreduzible affine Varietät X gibt es eine endliche Surjektion der Gestalt
$\varphi: X \to \mathbb{A}^n$.

Beweis. Sei $X \subset A^n$ eine echte abgeschlossene Teilmenge. Wir betrachten A^n als offene Teilmenge eines projektiven Raums,

$$\mathbb{A}^n = D(S_0) \subset \mathbb{P}^n,$$

und bezeichnen mit $\overline{X}$ die Abschließung von X im $\mathbb{P}^n$. Da X echte abgeschlossene Teilmenge des affinen Raums ist, ist $\overline{X}$ eine echte abgeschlossene Teilmenge des projektiven Raums[75]. Die <u>Fernhyperebene</u>

$$H_\infty := \mathbb{P}^n - D(S_0) \not\subseteq \overline{X}$$

ist nicht vollständig enthalten[76] in $\overline{X}$. Wir wählen einen Punkt

$$x \in H_\infty - \overline{X} = \mathbb{P}^n - (A^n \cup \overline{X}).$$

und betrachten die Projektion

$$\varphi: \overline{X} \to \mathbb{P}^{n-1}$$

mit dem Zentrum x. Ein Bildpunkt von φ liegt genau dann im Endlichen, d.h. in

$$\mathbb{A}^{n-1} := D(S_0) \subseteq P^{n-1},$$

wenn dasselbe für den Urbildpunkt gilt[77]. Es gilt also

$$\varphi(\overline{X}) \cap \mathbb{A}^{n-1} = \varphi(\overline{X} \cap \mathbb{A}^n) = \varphi(X).$$

---

[74] d.h. der einzigen Ring zwischen k[Y] und k(Y), der endlich ist über k[Y], ist k[Y] selbst. Wie wir sehen werden bedeutet dies, daß Y nicht zu schlimme Singularitäten haben darf.

[75] Man erhält die Gleichungen von $\overline{X}$ durch Homogenisieren der Gleichungen von X.

[76] Nach dem Nullstellensatz wären dann alle Gleichungen von $\overline{X}$ durch die Gleichung S_0 der Fernhyperebene teilbar. Beim Homogenisieren entstehen aber Gleichungen, die nicht durch S_0 teilbar sind.

[77] Da das Zentrum im Unendlichen liegt, liegen die Projektionsstrahlen entweder ganz im Unendlichem oder sie schneiden die Fernhyperebene in genau einem Punkt, nämlich im Zentrum.

Mit anderen Worten, φ induziert eine endliche Abbildung von X auf eine affine Varietät im $\mathbb{A}^{n-1}$. Durch iteriertes Anwenden dieser Aussage ergibt sich die Behauptung.
QED.

Bemerkungen

(i) Die Untersuchung von projektiven Varietäten als endliche Überlagerungen des projektiven Raums verallgemeinert den Riemannschen Standpunkt, Riemannsche Flächen als Überlagerungen der Riemannschen Zahlenkugel zu betrachten.

(ii) Theorem (b) besagt, jede endlich erzeugte k-Algebra ohne Nullteiler ist eine endliche Erweiterung eines Polynomrings. Man kann diese Aussage auch direkt beweisen. Aus ihr ergibt sich der Hilbertsche Nullstellensatz.

5.6 Dimension

5.6.1 Definition der Dimension

(a) Motivation

Im Abschnitt 5.2 haben wir gesehen, eine abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{A}^2$ besteht aus einer endlichen Punktmenge, aus ebenen algebraischen Kurven oder ist selbst gleich dem $\mathbb{A}^2$. Diese Aufteilung entspricht intuitiv dem Begriff der Dimension - wir treffen Varietäten der Dimensionen 0, 1 und 2 an. Unser Ziel ist es jetzt, den Begriff der Dimension für eine beliebige algebraische Varietät zu definieren.

Die Dimension haben sollte sollte die folgenden beiden Eigenschaften haben.

1. $\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{A}^n$ sollten die Dimension n besitzen.
2. Falls es eine endliche Abbildung $X \to Y$ gibt, so sollten X und Y dieselbe Dimension besitzen.

Da nach Abschnitt 5.5.4 für jede projektive oder affine Varietät eine endliche Abbildung auf den P^n bzw. A^n existiert, ist es naheliegend, als Dimension einer solchen Varietät die Zahl n zu nehmen.

Es erhebt sich jedoch die Frage, ob die Dimension auf diese Weise korrekt definiert ist. Kann es vorkommen, daß es für ein und dieselbe Varietät X endliche Abbildungen

$$X \to \mathbb{A}^m \text{ und } X \to \mathbb{A}^n \text{ mit } m \neq n$$

gibt ?

Nehmen wir an, X ist irreduzibel. Dann ergibt sich aus der Endlichkeit der Abbildung

$$f\colon X \to A^m,$$

daß k(X) eine endliche algebraische Erweiterung von

$$f^*k(A^m) \cong k(T_1,...,T_m)$$

ist. Mit anderen Worten k(X) hat den Transzendenz-Grad m über k.

(b) Definition der Dimension

Sei X eine irreduzible quasi-projektive Varietät. Dann heißt die Zahl

$$\dim X := \text{tr. deg}_k\, k(X)$$

Dimension von X.

Die Dimension einer reduziblen Varietät ist definiert als das Maximum der Dimensionen ihrer Komponenten,

$$\dim X := \max \{\dim X_1,...,\dim X_r\},$$

falls $X_1,..., X_r$ die ireduziblen Komponenten von X sind.

Ist $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilvarietät, so heißt die Zahl

$$\mathrm{codim}_X Y = \dim X - \dim Y$$

Kodimension von Y in X.

Bemerkung

Ist X irreduzibel und $U \subseteq X$ nicht-leer und offen, so gilt $k(U) = k(X)$, also

$$\dim U = \dim X.$$

(c) Beispiel 1 (afffiner und projektiver Raum)

$$\dim \mathbb{P}^n = \dim \mathbb{A}^n = n,$$

denn $\mathbb{A}^n$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{P}^n$, d.h.

$$k(P^n) = k(A^n) = k(T_1,...,T_n).$$

(d) Beispiel 2 (ebenene algebraische Kurven)

Eine ebene algebraische Kurve hat die Dimension 1 (wie wir in Abschnitt 5.1 gesehen haben).

(e) Beispiel 3 (endliche Mengen)

Wenn $X = \{(a_1,...,a_n)\}$ aus nur einem Punkt besteht, so gilt

$$\begin{aligned}\dim X &= \text{tr. deg } Q(k[T_1,...,T_n]/(T_1-a_1,...,T_n-a_n)) \\ &= \text{tr.deg } Q(k) \\ &= \text{tr.deg } k \\ &= 0\end{aligned}$$

Allgemeiner ist

$$\dim \{\text{endlich viele Punkte}\} = 0$$

(f) Beispiel 4 (direkte Produkte)

Für irreduzible Varietäten X und Y gilt

$$\dim X\times Y = \dim X + \dim Y.$$

Beweis. Wir können zu offenen Teilmengen übergehen und annehmen,

$$X \subseteq \mathbb{A}^M \text{ und } Y \subseteq \mathbb{A}^N$$

sind affin. Bezeichnungen:

$t_1,...,t_M$ Einschränkungen der Koordinatenfunktionen des $\mathbb{A}^M$ auf X

$u_1,...,u_N$ Einschränkungen der Koordinatenfunktionen des $\mathbb{A}^N$ auf Y

$m := \dim X$

$n := \dim Y$

Wir können annehmen,

$t_1,...,t_m$ sind algebraisch unabhängig in k(X)

$u_1,...,u_n$ sind algebraische unabhängig in k(Y)

Es gilt

$$\begin{aligned}k[X\times Y] &= k[X]\otimes_k k[Y] \\ &= k[t_1,...,t_M]\otimes_k k[u_1,...,u_N]\end{aligned}$$

$=$[78] $k[t_1,...,t_M,u_1,...,u_N]$

Alle Elemente des letzten Rings sind algebraisch abhängig von den Elementen

(1) $t_1,...,t_m,u_1,...,u_n$

Es reicht also, zu zeigen, letztere sind algebraisch unabhängig über k. Nehmen wir an, es besteht eine algebraische Relation zwischen ihnen,

$$F(t,u) = F(t_1,...,t_m,u_1,...,u_n) = 0 \text{ auf } X\times Y.$$

Für jedes $x\in X$ gilt dann

$$f(x,u_1,...,u_n) = 0 \text{ auf } Y.$$

Da die $u_1,...,u_n$ algebraisch unabhängig sind auf Y, muß jeder Koeffizient a(x) dieses Polynoms (in den u_i) Null sein. Es gilt also a(x) = 0 für jedes $x\in X$, d.h.

$$a(t_1,...,t_m) = 0 \text{ auf } X.$$

Wegen der algebraischen Unabhängigkeit der $t_1,...,t_m$ auf X, müssend die Koeffizienten des Polynoms

$$a(t_1,...,t_m)$$

sämtlich Null sein. Da dies für alle Koeffizienten des Polynoms F gilt, folgt F = 0. Wir haben gezeigt, die Elemente (1) sind algbraisch unabhängig über k.

QED.

(g) Theorem 1 (Verhalten der Dimension bei Inklusionen)

1. $X \subseteq Y \Rightarrow \dim X \le \dim Y$.
2. Y irreduzibel, $X\subseteq Y$, $\dim X = \dim Y \Rightarrow X = Y$.

Beweis. Wir können annehmen, X und Y sind affin und irreduzibel.[79] Sei

$$X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^N \text{ und } \dim Y = n.$$

Zu 1. Dann sind unter den Koordinaten $t_1,...,t_N$ je n+1 algebraisch abhängig auf Y, d.h. sie genügen algebraischen Relationen

$$f(t_{i_1},...,t_{i_{n+1}}) = 0 \text{ auf } Y.$$

Diese Relationen bestehen erst recht auf der Teilmenge X, d.h. $\dim X \le n = \dim Y$. Es gilt Aussage 1.

Zu 2. Sei jetzt

$$\dim X = \dim Y = n$$

Dann gibt es n Koordinaten unter den $t_1,...,t_N$, die auf X algebraisch unabhängig sind, sagen wir

$$t_1,...,t_n\ .$$

Diese sind dann erst recht unabhängig auf Y. Für jedes $u\in k[Y] - \{0\}$ besteht eine algebraische Relation

$$a_0(t_1,...,t_n)\cdot u^l+...+ a_l(t_1,...,t_n) = 0 \text{ auf } Y. \qquad (1)$$

---

[78] Wir identifizieren wie $t_i\otimes 1$ mit t_i und $1\otimes u_j$ mit u_j. Das entspricht der Praxis, die i-te Koordinatenfunktion x_i des $\mathbb{A}^m$ auch als Koordinatenfunktion des $\mathbb{A}^m\times\mathbb{A}^n$ anzusehen.

[79] Wir benutzen die Tatsache, daß mit $X\subseteq Y$ jede irreduzible Komponente X_i von X ganz in einer von Y liegt: die Zerlegung von Y in Komponenten würde sonst eine echte Zerlegung von X_i in Komponenten induzieren.

Wir können annehmen, das Polynom auf der linken Seite von (1) ist irreduzibel und der höchste Koeffizient ist ungleich Null,

$$a_0(t_1,...,t_n) \neq 0.$$

Die Relation (1) besteht natürlich erst recht auch auf X.
Behauptung: in dieser Situation ist u nicht identisch Null auf X.
Andernfalls müßte wegen (1) gelten

$$a_l(t_1,...,t_n) = 0 \text{ auf } X.$$

Weil die $t_1,...,t_n$ algebraisch unabhängig sind auf X, müßt das Polynom a_l identisch Null sein (auf $\mathbb{A}^N$ also auch auf Y). Das widerspricht aber der Irreduzibilität der linken Seite von (1).

Wir haben gezeigt: ist u = 0 auf X, so mußt u = 0 sein auf Y, d.h. es gilt auch $Y \subseteq X$.
QED.

(h) Theorem 2 (Die Dimension der Komponenten von Hyperflächen)

Die irreduziblen Komponenten einer Hyperfläche im $\mathbb{A}^N$ oder $\mathbb{P}^N$ haben die Kodimension 1.

Beweis. Wir können uns auf den Fall von Hyperflächen im $\mathbb{A}^N$ beschränken[80]. Sei

$$X = V(f) \subseteq A^N$$

die Hyperfläche. Wir betrachten die Zerlegung

$$f = f_1 \cdot ... \cdot f_l$$

der definierenden Gleichung in irreduzible Faktoren. Da f_i in k[T] ein Primideal erzeugt sind die $V(f_i)$ gerade die irreduziblen Komponenten von X und diese haben das Ideal

$$(f_i) \subseteq k[T].$$

Wir können uns auf den Fall $X = V(f_i)$ beschränken, d.h. wir können annehmen,

f irreduzibel.

O.B.d.A komme die Unbestimmte T_N in F wirklich vor. Es reicht zu zeigen, die Koordinatenfunktionen

$$t_i := T_i|_X \text{ mit } i = 1,...,N\text{-}1$$

sind algebraisch unabhängig. Angenommen, sie wären abhängig. Dann gäbe es ein Polynom g in $T_1,...,T_{N-1}$ mit

$$g(T_1,...,T_{N-1}) = 0$$

auf X. Nach dem Nullstellensatz gilt dann $f \mid g^r$ für ein r, was nicht möglich ist, da T_N in g nicht vorkommt.
QED.

(i) Theorem 3 (Mengen der Kodimension 1 sind Hyperflächen)

Jede abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^N$, deren irreduzible Komponenten die Kodimension 1 haben, ist eine Hyperfläche. Das Ideal von X ist ein Hauptideal.

Beweis. Wir können uns auf den Fall beschränken, daß X irreduzibel ist. Wegen

$$\dim X = N\text{-}1 \neq N$$

ist $X \neq \mathbb{A}^N$, d.h. es gibt ein Polynom $f \in k[T] - \{0\}$ mit

$$f = 0 \text{ auf } X.$$

---

[80] Auf jeder Komponente gibt es einen Punkt mit einer affinen Umgebung.

Weil X irreduzibel ist (d.h.I(X) ist prim), können wir annehmen f ist irreduzibel. Dann gilt

$$X \subseteq V(f) = \text{irreduzibel}$$

und

$$\dim X = N\text{-}1 = \dim V(f).$$

Nach (g) Theorem 1 folgt X = V(f) und es ist

$$I(X) = \sqrt{(f)} = (f)$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt, weil (f) ein Primideal ist.
QED.

(j) Theorem 3' (Mengen der Kodimension 1 in Produkträumen)

Jede Teilvarietät $X \subseteq \mathbb{P}^{N_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{N_r}$, deren irreduzible Komponenten die Kodimension 1 haben, wirf durch eine Gleichung definiert, die homogen ist in jeder der r Gruppen von Variablen.
Beweis. Der Beweis ist analog zu dem von (i).[81]
QED.

5.6.2 Die Dimension von Schnitten mit Hyperebenen

Wenn wir versuchen, Varietäten zu verstehen, die durch mehr als nur eine Gleichung definiert sind, so werden wir sofort mit der Frage nach der Dimension des Durchschnitts einer Varietät mit einer Hyperfläche konfrontiert.

Wir untersuchen dieses Problem zunächst für projektive Varietäten.

(a) Hyperflächenschnitte

Für jede abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq \mathbb{P}^N$ und jede Form F, die auf X nicht identisch Null ist, setzen wir

$$X_F = X \cap V(F) = \{x \in X \mid F(x) = 0\}$$

Eine solche Menge heißt Hyperflächenschnitt von X.
Bemerkungen
(i) Man kann stets ein F mit vorgegebenen Grad finden, das auf keiner Komponente von X identisch verschwindet.
(ii) Wir berechnen als nächstes die Dimension von X_F im irreduziblen Fall.

Beweis von (i). Wir wählen auf jeder irreduziblen Komponente einen Punkt. Dann gibt es eine Linearform, die in keinem dieser Punkte Null ist.[82] Durch Übergang zu einer Potenz erhalten wir eine Form mit vorgegebenem Grad.
QED.

---

[81] Man braucht, daß die irreduziblen Faktoren eines multi-homogenen Polynoms multi-homogen sind. Das ist aber leicht einzusehen: aus $f = g\cdot h$ und f multi-homogen und g,h beliebig kann man leicht eine Zerlegung gewinnen mit g und h multi-homogen: man schreibt g und h als Summe von multihomogenen Polynomen und läßt dann alle Summanden wegen, die den falschen Multigrad haben.

[82] Die Hyperflächen durch einen Punkt im P^N entsprechen einer Hyperfläche in einem anderen P^N (dem dualen projektiven Raum). Die Menge der Hyperflächen, die durch einen von endlich vielen Punkten gehen, entsprechen im dualen Raum der Vereinigung von endlich vielen Hyperflächen. Diese Vereinigung hat die Dimension N-1, ist also vom gesamten dualen Raum verschieden. Es gibt also eine Hyperfläche, die alle die vorgegebenen Punkte meidet.

(b) Theorem 4 (Die Dimension eines Hyperflächenschnitts im irreduziblen Fall)

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge und F eine Form, die nicht identisch Null ist auf X. Dann gilt $\dim X_F = \dim X - 1$.

Beweis. Wir verzichten zunächst auf die Annahme, daß X irreduzibel sein soll, fordern aber, daß F auf keiner Komponente von X Null ist. Ist

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten, so gilt

$$X_F = (X_1)_F \cup \ldots \cup (X_r)_F$$

und jedes $(X_i)_F$ ist echt in der irrduziblen Menge X_i enthalten. Es folgt[83]

$$\dim (X_i)_F < \dim X_i,$$

also $\dim X_F < \dim X$. Wir wiederholen jetzt die Argumentation mit $X^{(1)} := X_F$ anstelle von $X^{(0)} := X$ und einem homogenen Polynom F_1 anstelle von $F_0 := F$, das auf keiner Komponente von $X^{(1)}$ Null ist. Wir erhalten auf diese Weise eine absteigende Kette von geschlossenen Teilmengen

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset \ldots \supset X^{(i+1)} = X^{(i)}_{F_i} \supset \ldots$$

mit einer Form F_i die auf keiner Komponente von $X^{(i)}$ Null ist. Nach der Bemerkung von (a) können wir dabei noch den Grad der F_i vorgeben. Sei also

$$\deg F_i = \deg F \text{ für alle i.}$$

Nach Konstruktion gilt

$$\dim X^{(i)} <= d - i \text{ mit } d := \dim X \tag{1}$$

für alle i. Deshalb ist insbesondere

$$X^{(d+1)} = \emptyset$$

leer, d.h. die Formen $F_0,\ldots,F_d$ haben auf X keine gemeinsame Nullstelle. Sei jetzt X irreduzibel. Wir betrachen die reguläre Abbildung

$$\varphi: X \to \mathbb{P}^d,\ x \mapsto [F_0(x),\ldots,F_d(x)]\ .$$

Nach 5.5.3 (i) Theorem 8 ist die Abbildung $\varphi: X \longrightarrow \varphi(X)$ endlich. Insbesondere haben X und $\varphi(X)$ dieselbe Dimension,

$$\dim \varphi(X) = \dim X = d.$$

Weil X projektiv ist, ist $\varphi(X)$ abgeschlossen in P^d. Nach 5.6.1 (g) folgt

$$\varphi(X) = \mathbb{P}^d.$$

Wir haben noch zu zeigen, in (1) gilt für i=1 das Gleichheitszeichen. Angenommen, die Ungleichung wäre echt. Dann wäre nach der oben durchgeführten Argumentation bereits die Menge

$$X^{(d)} = \emptyset$$

[83] Weil auch jede irreduzible Komponente von $(X_i)_F$ echt enthalten ist in der irreduziblen Varietät (vgl. (g) Theorem 1).

leer. Mit anderern Worten, die Formen $F_0,...,F_{d-1}$ besitzen keine gemeinsame Nullstelle auf X. Das bedeutet aber, der Punkt [0,...,0,1] liegt nicht im Bild von φ im Widerspruch zur (gerade bewiesenen) Surjektivität von φ.
QED.

(c) Folgerung 1 (Existenz von Teilvarietäten zu vorgegebener Dimension)
Auf einer projektiven Varietät X gibt es zu jeder vorgegebenen Dimension s < dim X eine Teilvarietät.

(d) Folgerung 2 (Induktive Definition der Dimension)
Für jede irreduzible projektive Varietät X gilt

$$\dim X = 1 + \sup \{ \dim Y \mid Y \subset X \text{ echte Teilvarietät} \}.$$

(e) Folgerung 3 (Dimension als maximale Kettenlänge)
Für jede projektive Varietät X gilt

$$\dim X = \max \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt eine echt absteigende Kette} \\ Y_0 \supset Y_1 \supset \ldots \supset Y_n \\ \text{irreduzibler Teilvarietäten von } X \end{array} \right\}$$

(f) Folgerung 4 (Dimension und komplementäre lineare Unterräume)
Für jede projektive Varietät $X \subseteq \mathbb{P}^N$ gilt

$$\dim X = N - s - 1,$$

wenn s die größte Dimension eines linearen Unterraums $E \subseteq P^N$ ist mit

$$X \cap E = \emptyset.$$[84]

(g) Folgerung 5 (Dimension einer Nullstellenmenge mit r Gleichungen)
Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine projektive Varietät und $F_1,...,F_r$ homogenen Polynome. Dann gilt

$$\dim X \cap V(F_1,...,F_r) \ge \dim X - r.$$

Bemerkungen

(i) Insbesonder ist $X \cap V(F_1,...,F_r) \ne \emptyset$ im Fall $r \le \dim X$.

(ii) n homogene Polynome in n+1 Unbestimmten besitzen stets eine gemeinsame von (0,...,0) verschiedene Nullstelle.

(iii) Je zwei Kurven im $\mathbb{P}^2$ besitzen einen gemeinsamen Schnittpunkt. Für die nicht-entartete Fläche zweiter Ordnung

$$Q(\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq P^3$$

ist das nicht so.[85] Insbesondere sind Q und $\mathbb{P}^2$ nicht isomorph. Wir haben damit ein Beispiel nicht-isomorpher Varietäten gefunden, die birational isomorph sind[86].

(iv) Die Aussage von 5.6.1 (i) Theorem 3[87] ist falsch zum Beispiel für die Kurven auf der nichtentarteten quadratischen Fläche

---

[84] Sei d := dim X. Nach (g) Theorem 4 muß man mit mindestens d+1 Hyperebenen schneiden (deren Gleichungen linear unabhängig sein müssen) um die leere Menge zu erhalten. Der Durchschnitt dieser d+1 Hyperebenen hat die Dimension s := N - d - 1, d.h. es ist d = N - s -1.

[85] Wir wissen, $Q \cong P^1 \times P^1$ und je zwei Kurven der Gestalt $\{pt\} \times P^1$ sind disjunkt.

[86] Sie enthalten beide den $\mathbb{A}^2$ als offene Teilmenge.

$$Q = V(H) \subseteq \mathbb{P}^3.$$

Würden sich zwei Kurven der Schar $\{pt\}\times P^1$ durch jeweils eine Form definieren lassen, sagen wir durch F bzw. G, so hätte das Gleichungssystem

$$F = G = H = 0$$

im $\mathbb{P}^3$ keine Lösung (im Widerspruch zu Bemerkung (ii).

(h) Theorem 5 (Verschärfung von (b) Theorem 4)

Seien $X \subseteq P^N$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge der Dimension d und F eine Form, die nicht identisch Nul ist auf X. Dann hat jede irreduzible Komponente von X_F die Dimension d - 1.

Beweis. Wir betrachten die endliche Abbildung aus dem Beweis von (b),

$$\varphi: X \to \mathbb{P}^d,\ x \mapsto [F_0(x),...,F_d(x)],$$

mit $F_0 = F$. Weiter setzen wir für i = 0,...,d

$$U_i := \varphi^{-1}(D(S_i)) = X\cap D(F_i).$$

Die U_i bilden eine Überdeckung von X durch affine offene Teilmengen[88],

$$X = U_0\cup...\cup U_d\ .$$

Es reicht zu zeigen, die irreduziblen Komponenten der affinen Varietäten

$$U_i\cap X_F \tag{1}$$

haben die Dimension d-1. Alle weiteren Betrachtungen werden sich auf ein fest gewähltes i beziehen. Wir werden deshalb den Index i weglassen und einfach U anstelle von U_i schreiben. Die Menge (1) läßt wie folgt schreiben.

$$U\cap X_F = \{\ x\in U \mid F(x) = 0\ \} = \{\ x\in U \mid f(x) = 0\ \} \text{ mit } f = \frac{F}{F_i}\ ,$$

d.h. es ist gerade die Menge der Nullstellen der regulären Funktion $f\in k[U]$ auf der irreduziblen affinen Varietät,

$$U\cap X_F = V(f),\ U \text{ irreduzibel affin.}$$

Die Einschränkung der Abbildung φ auf U ist eine endliche Abbbildung[89] und hat die Gestalt

$$\varphi: U \to \mathbb{A}^d,\ x \mapsto (f_1,...,f_d), \tag{2}$$

wobei die erste Koordinatenfunktionen gleich $f_1 = \frac{F_0}{F_i} = \frac{F}{F_i} = f$ ist[90].

Wegen dim X_F = d-1, genügt es zu zeigen, die irreduziblen Komponenten von V(f) haben eine Dimension $\geq$ d-1. Es reich also zu zeigen,

---

[87] d.h. abgeschlossene Mengen der reinen Kodimension 1 lassen sich durch eine Gleichung definieren.

[88] Die Offenheit der U_i ist klar. Sie sind affin, weil die Mengen $D(F_i)$ affin sind. Letzteres ist klar im Fall, daß F_i eine Linearform ist. Im allgemeinen Fall benutze man die Veronese-Einbettung, um $D(F_i)$ als abgeschlossene Teilmenge des Komplements einer Hyperebenen des projektiven Raums darzustellen.

[89] Nach Definition der Endlichkeit von Abbildungen quasi-projektiver Varietäten in 5.5.3 (f).

[90] Die Koordinatenfunktionen haben gerade die Gestalt $\frac{F_j}{F_i}$.

$f_2,...,f_d$ sind algebraisch unabhängig auf jeder Komponente von V(f).

Sei $P\in k[T_2,...,T_d] - \{0\}$ ein von Null verschiedenes Polynom. Wir haben zu zeigen,

$$R := P(f_2,...,f_d) \neq 0 \text{ auf jeder Komponente von } V(Ï).$$

Dazu reicht es zu zeigen[91],

$$R\cdot Q = 0 \text{ auf } V(f),\ Q\in k[U] \Rightarrow Q = 0 \text{ auf } V(f).$$

Mit Hilfe des Nullstellensatzes für k[U] kann man diese Implikation wie folgt umformulieren:

$$f \mid (R\cdot Q)^a \text{ für ein } a \Rightarrow f \mid Q^b \text{ für ein } b.$$

Die Abbildung (2) sorgt dafür, daß der Integritätsbereich k[U] eine ganze Erweiterung von $k[T_1,...,T_d]$ ist. Die zu beweisende Implikation ergibt sich deshalb aus folgenden Lemma.

QED.

Lemma

Seien A ein Integritätsbereich, der ganz ist über dem Teilring $B = k[T_1,...,T_d]$. Weiter seien

$$R \in k[T_2,...,T_d] - \{0\},\ Q\in A - \{0\}$$

Elemene mit $T_1 \mid (R\cdot Q)^a$ in A für ein a>0. Dann gilt $T_1 \mid Q^b$ in A für ein $b > 0$.

Beweis. Die einzigen Eigenschaften der Polynome

$$x := T_1 \text{ und } y := R,$$

die wir verwenden werden, ist die Tatsache, daß sie teilerfremd sind im ZPE-Ring B. Wir setzen weiter

$$z := R^a \text{ und } v := Q^a.$$

Dann bekommt die zu beweisende Implikation die Gestalt:

$$x,z\in B \text{ teilerfremd, } v\in A \text{ mit } x \mid vz \text{ in } A \Rightarrow x \mid v^c \text{ in } A \text{ für ein } c > 0. \qquad (3)$$

Die Implikation besagt, daß die Eigenschaft, teilerfremd zu sein, in gewissem Sinne erhalten bleibt beim Übergang zu ganzen Erweiterungen.

Sei K der Quotientenkörper von B,

$$K := Q(B) = k(T_1,...,T_d).$$

<u>Zwischenbemerkung</u> (das Minimalpolynom eines ganzen Elements)

Jedes Element $t\in A$ ist ganz über B, also algebraisch über K. Sei

$$F(T) \in K[T]$$

das Mininimalpolynom, d.h. F sei normiert und irreduzibel mit F(t) = 0. Weil t ganz ist über B, gibt es außerdem ein normiertes Polynom

$$G(T)\in B[T]$$

mit G(t) = 0. In K[T] ist F ein Teiler von G,

$$G = F\cdot H \text{ mit } H\in K[T]$$

Durch Multiplikation der beiden Faktoren rechts mit Einheiten aus K gewinnt man aus dieser Zerlegung eine Zerlegung von G im Ring B[T]. Da G den höchsten Koeffizienten 1 hat, muß nach den Gaußschen Lemma die gegebene Zerlegung bereits eine Zerlegung in B[T] sein,

[91] Die i-te Komponente von V(f) liegt nicht in der Vereinigung der übrigen Komponenten. Es gibt also ein Polynom Q, welches auf allen Komponenten Null ist, nicht aber auf der i-ten. Die obige Implikation bedeutet dann, $R\cdot Q \neq 0$, d.h. R ist nicht Null auf der i-ten Komponente von V(f).

$F\in B[T]$, $H\in B[T]$

Die Ganzheit des Elements t impliziert also, daß sein normiertes Minimalpolynom Koeffizienten in B hat.

Fahren wir fort mit dem Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$vz = xw \text{ für ein } w\in A$$

Sei

$$F(T) = T^l + b_1 T^{l-1} + \dots + b_l$$

das Minimalpolynom von w über K. Weil w ganz ist über B, gilt $b_i\in B$ für jedes i. Das Minimalpolynom G des Elements $v = \frac{x}{z}w$ über K hat dann die Gestalt

$$G(T) \quad = \frac{x^l}{z^l}F(\frac{z}{x}\cdot T) = T^l + \frac{xb_1}{z}\cdot T^{l-1} + \dots + \frac{x^l b_l}{z^l} \tag{4}$$

d.h. es ist

$$0 \quad = v^l + \frac{xb_1}{z}\cdot v^{l-1} + \dots + \frac{x^l b_l}{z^l} \tag{5}$$

Da $v\in A$ ganz ist über B, gilt $\frac{x^i b_i}{z^i}\in B$ für alle i. Da x und z nach Voraussetzung teilerfremd sind, folgt $z^i \mid b_i$ für alle i. Wegen (5) ist damit $x \mid v^l$

QED.

(i) Folgerung 1 (der quasi-projektive Fall)

Seien $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine quasi-projektive irreduzible Varietät und F eine Form, die nicht identisch Null ist auf X. Dann ist X_F entweder leer oder jede irreduzible Komponente von X_F hat die Kodimension 1.

Beweis. Als quasi-projektive Varietät ist X offene Teilmenge einer abgeschlossenen Teilmenge

$$\overline{X} \subseteq P^N.$$

Weil X irreduzibel ist, ist auch $\overline{X}$ irreduzibel. Als offene Teilmenge von $\overline{X}$ hat X dieselbe Dimension wie X. Nach Theorem (h) hat die irreduzible Zerlegung von $\overline{X}_F$ die Gestalt

$$\overline{X}_F = \cup Y_i \text{ mit } \dim Y_i = \dim X - 1$$

Wir schneiden mit der offenen Teilmenge X und erhalten die Behauptung.

QED.

(j) Folgerung 2 (iterierte Hyperflächenschnitte)

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^N$ eine irreduzible quasi-projektive Varietät der Dimension d und $F_1,\dots,F_m$ seien Formen auf X. Dann ist

$$X \cap V(F_1,\dots,F_m)$$

entweder leer, oder jede irreduzible Komponente dieses Durchschnitts hat eine Dimension ≥ d-m.

Beweis ergibt sich durch wiederholtes Anwenden von (i).

QED.

(k) Theorem 6 (Dimension der Komponenten eines Durchschnitts)

Seien X, $Y \subseteq \mathbb{P}^N$ irreduzible quasi-projektive Varietäten der Dimensionen

$$\dim X = m\ ,\ \dim Y = n.$$

Es gelte $N < m + n$ und $X \cap Y \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\dim Z \geq m + n - N$$

für jede irreduzible Komponente von $X \cap Y$.

Beweis. Die Behauptung hat lokalen Charakter. Wir können deshalb annehmen, X und Y sind affine Varietäten. Dann besteht aber die Isomorphie

$$X \cap Y \cong (X \times Y) \cap \Delta \text{ (im } \mathbb{A}^{2N})$$

Die Behauptung folgt damit aus (j), denn Δ wird durch N Gleichungen definiert.

QED.

Bemerkungen

(i) Im projektiven Fall ist der Durchschnitt unter der Bedinung $N < m+n$ nie leer.

(ii) In etwas symmetrischerer Weise kann man die Aussage (im projektiven Fall) für eine beliebige Anzahl von Teilvarietäten wie folgt formulieren:

$$\operatorname{codim}_X \cap_{i=1}^r Y_i \leq \sum_{i=1}^r \operatorname{codim}_X Y_i$$

5.6.3 Der Satz von der Dimension der Faser

(a) Theorem 7 (Satz von der Dimension der Faser)

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung mit

1. X, Y irreduzibel.
2. f(X) liegt dicht in Y.

Dann gilt

(i) $\dim X \geq \dim Y$.

(ii) $\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim Y$ für jedes $y \in Y$.

(iii) Für die Punkte aus einer nicht-leeren offenen Menge $V \subseteq Y$ gilt in (ii) das Gleichheitszeichen.

Beweis. Zu (ii). Die Aussage ist lokaler Natur bezüglich Y. Wir können annehmen, Y ist eine affine Varietät. Sei also

$$Y \subseteq \mathbb{A}^N \text{ abgeschlossen.}$$

Sei $\overline{Y}$ die Abschließung von Y im projektiven Raum $\mathbb{P}^N$ ($\supseteq \mathbb{A}^N$). Wie im Beweis von 5.6.2 (b) betrachten wir eine echt absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen

(1) $$\overline{Y} = Y^{(0)} \supset \ldots \supset Y^{(i)} \supset Y^{(i+1)} \supset \ldots \supset Y^{(n)}\ ,\ n := \dim Y.$$

Dabei sei

$$Y^{(i+1)} = Y^{(i)} \cap V(G_i)$$

mit einer Hyperfläche $V(G_i)$, die keine Komponente von $Y^{(i)}$ ganz enthält. Nach 5.6.2 (h) hat dann jede Kompontente von $Y^{(i)}$ eine Dimension = n-i.

Wir können dabei die sogar annehmen, die $V(G_i)$ sind Hyperebenen und gehen sämtlich durch den vorgegebenen Punkt $y \in Y$. Eine solche Hyperebene findet sich, solange die Komponenten von $Y^{(i)}$ eine Dimension >0 haben, d.h. wir erhalten eine Kette der Gestalt (1). Die Menge $Y^{(n)}$ ist 0-dimensional, besteht also aus nur endlich vielen

Punkten, unter denen sich der Punkt y befindet. Wir können deshalb eine offene affine Umgebung $U \subseteq \mathbb{A}^N$ von y finden mit

$$Y^{(n)} \cap U = \{y\}.$$

Die Menge $Y^{(n)} = Y \cap V(G_0,....,G_{n-1})$ ist auf Y durch n Gleichungen definiert. Deshalb ist die einpunktige Menge $\{y\}$ auf U durch n Gleichungen definiert. Wir ersetzen jetzt Y durch U und X durch $f^{-1}(U)$ und können somit O.B.d.A annehmen, die Menge

$$\{y\} = V(g_0,...,g_{n-1}),\ g_i \in k[Y]$$

ist durch n Gleichungen definiert. Die Faser über y hat dann die Gestalt

$$f^{-1}(y) = V(g_0 \circ f,...,g_{n-1} \circ f),$$

d.h. sie ist auf X ebenfalls durch n Gleichungen definiert. Nach 5.6.2(i) gilt damit

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - n = \dim X - \dim Y.$$

<u>Zu (i) und (iii)</u>. Wir haben zu zeigen,

(2) $\dim f^{-1}(y) \leq \dim X - \dim Y$ für y aus einer offenen Teilmenge von Y.

Wir können Y durch eine offene Teilmenge ersetzen, also wieder annehmen,

$$Y \subseteq \mathbb{A}^N \text{ abgeschlossen.}$$

Aufgabe: Man zeige, jede quasi-projektive Varietät besitzt eine endliche Überdeckung durch affine offene Teilmengen.[92]

Sei

$$X = U_1 \cup ... \cup U_r$$

eine solche Überdeckung. Wenn wir für jede der Einschränkungen

$$f|_{U_i} : U_i \to Y$$

eine offene Teilmenge in Y finden, für welche (2) gilt, so ist für y aus dem Durchschnitt dieser offenen Teilmengen

$$\dim f^{-1}(y) \leq \max \dim f^{-1}(y) \cap U_i \leq \dim X - \dim Y.$$

Wir können also annehmen, X ist affin, sagen wir,

$$X \subseteq \mathbb{A}^M \text{ abgeschlossen.}$$

Man beachte, weil die U_i dicht liegen in X, liegen auch die $f(U_i)$ dicht in Y, d.h Voraussetzung 2 bleibt erhalten bei dieser Reduktion.

Die Abbildung

$$f^*: k[Y] \to k[X]$$

ist nach Voraussetzung 2 injektiv. Wir werden im folgenden der Einfachheit halber annehmen,

$$k[Y] \subseteq k[X]$$

---

[92] Sei $X = X' - X''$ mit $X', X'' \subseteq \mathbb{P}^N$ abgeschlossen. Dann gilt

$$X' = D_{X'}(S_0) \cup ... \cup D_{X'}(S_N) \text{ mit } D_{X'}(F) := \{p \in X' \mid F(p) \neq 0\}$$

$$X'' = V(G_1,...,G_s)$$

Es reicht zu zeigen, die $D_{X'}(F_i) - X''$ besitzen eine endliche affine offene Überdeckung. Das ist aber der Fall wegen

$$D_{X'}(F_i) - X'' = D_{X'}(F_i G_1) \cup ... \cup D_{X'}(F_i G_s)$$

und damit $k(Y) \subseteq k(X)$. Bezeichnungen:

$n := \dim Y$
$m := \dim X$
$k[Y] = k[y_1,...,y_N]$
$k[X] = k[x_1,...,x_M]$

Der Körper $k(X)$ hat über $k(Y)$ den Transzendenzgrad m-n (≥ 0). Wir können annehmen,

$$x_1,...,x_{m-n} \text{ algebraisch unabhängig über } k(Y).$$

Die übrigen x_i sind von diesen abhängig, es gilt

$$F_i(x_i, x_1,...,x_{m-n},y_1,...,y_N) = 0,\ i = m-n+1,..., M,$$

mit Polynomen F_i über k, wobei x_i in F_i wirklich vorkommt. Sei $\bar{x}_i$ die Einschränkung von x_i auf $f^{-1}(y)$, Dann gilt

$$k[f^{-1}(y)] = k[\bar{x}_1,..., \bar{x}_M]$$

Wir betrachten jetzt die Polynome F_i als Polynome in den x_j allein, so daß die Koeffizienten der F_i Polynome in den y_j sind. Wir nehmen die von Null verschiedenen Koeffizientenpolynome a_{ij} der F_i her und betrachten die Menge

$$V := \{y \in Y \mid a_{ij}(y) \ne 0 \text{ für alle i und alle j }\}$$

Dies ist eine nicht-leere offene Teilmenge von Y (weil Y irreduzibel ist). Für $y \in V$ sind die Polynome

$$F_i(T_i, T_1,...,T_{m-n},y_1(y),...,y_N(y)) \ne 0$$

nicht identisch Null und beschreiben die algebraische Abhängigkeit der $\bar{x}_i$ von den

$$\bar{x}_1,..., \bar{x}_{m-n}.$$

Die irreduziblen Komponenten von $f^{-1}(y)$ haben deshalb sämtlich eine Dimension $\le$ n-m, d.h. es gilt

$$\dim f^{-1}(y) \le n - m.$$

QED.

(b) Folgerung

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung mit
1. X, Y irreduzibel.
2. f(X) liegt dicht in Y.

Dann ist für jede ganze Zahl q die Menge

$$Y_q := \{y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) \ge q \}$$

abgeschlossen in Y.
Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach dim Y. Im Fall dim Y = 0 ist Y ein einzelner Punkt und die Mengen Y_q sind leer oder gleich Y, d.h. die Behauptung gilt.
Sei jetzt dim Y > 0. Für $q \le \dim X - \dim Y$ ist $Y_q = Y$ (nach (a)), d.h. die Behauptung gilt. Sei jetzt q > dim X - dim Y. Dann gibt es nach (a) eine abgeschlossen Teilmenge

$$Y' \subset Y \text{ (echt enthalten)}$$

mit

$$Y_q \subseteq Y'.$$

Sei

$$Y' = Y'_1 \cup ... \cup Y'_r$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Weil Y irreduzibel ist, gilt
$\dim Y'_i < \dim Y$. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit die Behauptung richtig für die Einschränkungen

$$f_{ij}: Z_{ij} \hookrightarrow f^{-1}(Y'_i) \to Y'_i \tag{1}$$

von f auf die irreduziblen Komponenten Z_{ij} von $f^{-1}(Y'_i)$. Nach Konstruktion gilt

$$Y_q \subseteq \cup\, Y'_i$$

also

$$Y_q = (Y_q \cap Y'_1) \cup ... \cup (Y_q \cap Y'_1).$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} Y_q \cap Y'_i &= \{x \in f^{-1}(Y'_i) \mid \dim f^{-1}(y) \ge q\} \\ &= \{x \in \cup_j Z_{ij} \mid \dim f^{-1}(y) \ge q\} \qquad \text{(nach Definition der } Z_{ij}\text{)} \\ &= \cup_j \{y \in Z_{ij} \mid \dim f^{-1}(y) \ge q\} \\ &= \cup_j \{y \in Z_{ij} \mid \dim f_{ij}^{-1}(y) \ge q\} \end{aligned}$$

Es reicht also, die Behauptung für die Abbildungen (1) zu beweisen. Für diese gilt sie aber nach Voraussetzung.
QED.

(c) Theorem 8 (Reguläre Abbildungen mit irreduziblen Fasern konstanter Dimension)

Sei f: $X \to Y$ eine reguläre Abbildung von projektiven Varietäten und $V \subseteq Y$ eine nicht-leere offen Teilmenge. Wir nehmen an:
1. $f(X) = Y$.
2. Y ist irreduzibel.
3. Für $y \in V$ sind die Fasern $f^{-1}(y)$ irreduzibel und alle von derselben Dimension.

Dann ist $f^{-1}(V)$ irreduzibel.
Beweis. Wir setzen

$$n := \dim f^{-1}(y),\ y \in V.$$

Seien $X' := f^{-1}(V)$ und

$$\overline{X}' = \cup\, X_i \tag{1}$$

die Zerlegung der projektiven Abschließung von X' in irreduzible Komponenten. Für jedes i ist dann

$$f(X_i) \text{ irreduzibel.}$$

Wegen $\cup\, f(X_i) = f(\overline{X}') =$[93] Y und Y irreduzibel folgt

$$f(X_i) = Y$$

für mindestens ein i. Wir entfernen aus V alle $f(X_i)$, die von Y verschieden sind und erhalten eine nicht-leere[94] offene Teilmenge

[93] $f(\overline{X}')$ ist abgeschlossen und enthält die dicht liegende Menge V.

$$V' := V - (\cup_{f(X_i)\neq Y} f(X_i))$$

mit dem vollständigen Urbild

$$U' := f^{-1}(V').$$

Wir bilden auf beiden Seiten von (1) den Durchschnitt mit

$$U' := f^{-1}(V') \subseteq f^{-1}(V) = X' \subseteq \overline{X}'$$

und erhalten

$$U' = \cup U'_j \text{ mit } U'_j := X_j \cap U'.$$

Weil U'_j offen ist in X_j , also mit X_j aucn U'_j irreduzibel ist, ist die Vereinigung auf der rechten Seite gerade die Zerlegung von U' in irreduzible Komponenten.

Weiter sei

$$f_j: U'_j \to V'$$

die Einschränkung von f und

$$m_j := \min \{ \dim f_j^{-1}(y) \mid y \in V\}$$

Nach dem Satz von der Dimension der Faser 1.6.3(a) werden alle diese Minima auf einer offenen Teilmenge $V''\subseteq V'$ angenommen. Wegen

$$\cup f_j^{-1}(y) = f^{-1}(y) \text{ irreduzibel von der Dimension n für } y\in V''$$

gilt

$$\max \{ m_j \} = n.$$

Außerdem gibt es ein $j = j_0$ mit $\dim f_{j_0}^{-1}(y) = n$ für $y\in V''$ also[95]

$$\dim f_{j_0}^{-1}(y) = n \text{ für alle } y\in V.$$

Für alle $y\in V$ hat also die abgeschlossene Teilmenge $f_{j_0}^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$ dieselbe Dimension wie die irreduzible Varietät $f^{-1}(y)$, d.h. es gilt $f_{j_0}^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ für alle $y\in V$, d.h.

$$f_{j_0}^{-1}(V) = f^{-1}(V).$$

Als offene Teilmenge der irreduziblen Komponente X_{j_0} ist $f_{j_0}^{-1}(V)$ aber irreduzibel, d.h. $f^{-1}(V)$ ist irreduzibel.

QED.

Folgerung

Sei $f: X \to Y$ eine reguläre Abbildung von projektiven Varietäten. Wir nehmen an:

1. $f(X) = Y$.
2. Y ist irreduzibel.
3. Die Fasern $f^{-1}(y)$ sind irreduzibel und alle von derselben Dimension.

---

[94] Y ist irreduzibel, d.h. der Durchschnitt zweier nicht-leerer offener Teilmengen ist nicht-leer.

[95] Die Faserdimension von f_{j_0} kann in den Punkten von V - V'' höchstens größer werden. Das ist hier aber nicht der Fall, da n nach Definition die Faserdimension von f über den Punkten von V ist (vgl. auch Bedingung 3).

Dann ist X irreduzibel.
Beweis. Man setze im obigen Satz V = Y.
QED.

Bemerkung
Als Spezialfall der Folgerung ergibt sich ein neuer Beweis für die Irreduzibilität des Produktes von irreduziblen Varietäten.

1.6.4 Geraden auf Flächen

(a) Vorbemerkungen

(i) Nach den Anstrengungen, die wir den Beweisen einiger Sätze über die Dimension gewidmet haben, ist es naheliegend nach Anwendungen dieser Sätze zu fragen. Wir illustieren dies hier anhand der Frage nach der Lage von Geraden auf Flächen im $\mathbb{P}^3$.

(ii) Der Begriff der Dimension erweist sich in der Regel dann als nützlich, wenn es darum geht exakt zu beschreiben von wievielen Parametern die Elemente einer gegebenen Menge abhängen.

(iii) So haben wir gesehen, daß die Hyperflächen des Grades m im $\mathbb{P}^n$ den Punkten des projektiven Raumes

$$P^{\nu_{n,m}} \text{ mit } \nu_{n,m} := \binom{m+n}{m} - 1$$

entsprechen,

(iv) Wir wollen jetzt einen Fall betrachten, in welchem die Teilvarietäten keine Hyperflächen sind, und zwar den einfachsten - den der Geraden im $\mathbb{P}^3$.

(b) Bezeichnungen

$\mathbb{G}(l, n)$	:= Menge der k-linearen Unterräume der Dimension l von k^n (Graßmann-Varietät).
$V(l,n)$	:= Menge der linear unabhängigen l-Tupel von Vektoren des k^n (Stiefel-Varietät)
$\pi: V(l,n) \to \mathbb{G}(l, n)$	die natürliche Abbildung, welche jedem l-Tupel unabhängiger Vektoren, den von diesen erzeugten Unterraum zuordnet.

(c) Plücker-Koordinaten einer Geraden im $\mathbb{P}^3$

Ein Punkt im $\mathbb{P}^3$ ist durch eine Gerade durch den Ursprung im k^4 gegeben, d.h. durch einen 1-dimensionalen linearen Unterraum von k^4,

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{G}(1, 4).$$

Eine Gerade im $\mathbb{P}^3$ ist durch einen 2-dimensionalen linearen Unterraum des k^4 gegeben, d.h.

$$\{\text{Geraden im } \mathbb{P}^3\} = \mathbb{G}(2, 4).$$

Sei $L\in \mathbb{G}(2, 4)$ und $(x,y)\in V(l,n)$ ein Urbild von $L = k\bullet x + k\bullet y$ bei der natürliche Abbildung

$$\pi: V(l,n) \to \mathbb{G}(l, n).$$

Dann hängt der Vektor

$$p(L) := x\wedge y \in \wedge^2 k^4$$

von der speziellen Wahl der Basis (x,y) von L ab. Ist (x',y') eine weitere solche Basis, so gibt es eine lineare Transformation T: L → L, welche die Basis x,y von L in die Basis x',y' von L überführt. Der Wert p(L) multipliziert sich also beim Wechsel der Basis mit det(T) ≠ 0. Mit anderen Worten, das Element des zugehörigen projektiven Raumes,

$$[p(L)] = [x\wedge y] \in (\wedge^2 k^4 - \{0\})/k^* = \mathbb{P}(\wedge^2 k^4) \cong \mathbb{P}^5$$

ist unabhängig von der speziellen Wahl der Basis von L. Die projektiven Koordinaten des Punktes [p(L)] heißen <u>Plücker-Koordinaten</u> der Geraden $L \subseteq \mathbb{P}^3$.

Bemerkungen

(i) Zur Standardbasis $e_0, \ldots, e_3$ des k^4 gehört die Standardbasis $\{ e_i\wedge e_j\}_{0\le i<j\le 3}$ von $\wedge^2 k^4$. Eine Gerade L mit der Basis (x,y) hat bezüglich dieser Basis gerade die Plücker-Koordinaten

$$p_{ij}(L) = x_i y_j - y_i x_j \quad , i < j,$$

d.h. es ist[96]

$$p(L) = [x^T y - y^T x].$$

(ii) Die projektiven Koordinaten nicht jeden Punktes im $\mathbb{P}^5$ treten als Plücker-Koordinaten einer Geraden L auf. Es ist leicht zu sehen, daß die Plücker-Koordinaten der Bedingung

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

genügen.[97]

(iii) Man kann zeigen, wenn die p_{ij} der Relation von (ii) genügen, so handelt es sich um die Plücker-Koordinaten einer Geraden im $\mathbb{P}^3$.[98]

---

[96] Wir verzichten hier auf die Bedingung i<j und erhalten damit 16 Koordinaten, die aber für i=j sämtlich Null sind und sich sonst nur im Vorzeichen von den eigentlichen Plücker-Koordinaten unterscheiden.

[97] Sei (x,y) eine Basis von $L \subseteq k^4$, $x = (x_0,\ldots,x_3)$, $y = (y_0,\ldots,y_3)$. Dann ist die Determinante

$$d = \det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

offensichtlich Null. Entwicklung nach den ersten beiden Spalten liefert gerade die Plücker-Identität (multipliziert mit 2). In der Charakteristik 2 muß man sich noch etwas Zusätzliches einfallen lassen: man setze für die x_i und y_j Unbestimmte ein. Die obige Argumentation zweigt dann, daß die mit 2 multiplizierte Plücker-Identität in

$$\mathbb{Z}[x_0,\ldots,x_3, y_0,\ldots,y_3]$$

gilt. Weil dieser Polynomring nullteilerfrei ist, gilt dort auch die Plücker-Identität selbst. Die uns eigentlich interessierende Plücker-Identität über dem Körper k erhält man durch Anwenden des Ring-Homomorphismus

$$\mathbb{Z}[x_0,\ldots,x_3, y_0,\ldots,y_3] \longrightarrow k,$$

welcher die x_i und y_j auf vorgegeben Elemente von k abbildet.

[98] siehe zum Beispiel Keller [1], Kapitel 10, §51, Abschnitt g), Satz 4.

(iv) Die Geraden des $\mathbb{P}^3$ bilden eine projektive Hyperfläche zweiten Grades im $\mathbb{P}^5$, welche <u>Plücker-Varietät</u> heißt und mit

$$\prod \subseteq \mathbb{P}^5$$

bezeichnet wird.

(d) Die Punkte einer Geraden mit gegebenen Plücker-Koordinaten

Sei $L \subseteq \mathbb{P}^3$ eine Gerade mit den Plücker-Koordinaten

$$p(L) = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}]$$

Dann gilt

$$L = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \mid x_i = \sum_j a_j p_{ij}\ ,\ a_j \in k\ \}.$$

Beweis. Betrachten wir L als 2-dimensionalen Unterraum $L \subseteq k^4$. Sei (x,y) eine Basis von L. Dann liegt jeder Punkt der folgenden Gestalt in L

$$x\cdot f(y) - y\cdot f(x) \in L. \tag{1}$$

Dabei bezeichne $f: k^4 \to k$ eine beliebige Linearform. Wir erhalten auf diese Weise eine Abbildung

$$\mathrm{Hom}_k(k^4, k) \to L,\ f \mapsto x\cdot f(y) - y\cdot f(x).$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear und hat als Kern die Linearformen f mit f(x) = f(y) = 0, d.h. einen 2-dimensionalen Unterraum. Das Bild ist somit 2-dimensional, d.h. die Abbildung ist surjektiv. Wir haben gezeigt: jeder Punkt von L hat die Gestalt (1) mit einer Linearform f. Mit $f(x) = \sum_j a_j x_j$ erhalten wir

$$x\cdot f(y) - y\cdot f(x) = \sum_j x\cdot a_j y_j - y\cdot a_j x_j = \sum_{i,j} (x_i a_j y_j - y_i a_j x_j) e_i = \sum_{i,j} a_j p_{ij} e_i$$

Die i-te Koordinate dieses Punktes ist $\sum_j a_j p_{ij}$. Die Punkte von L haben also tatsächlich die angegebenen Koordinaten.
QED.

(e) Die Inzidenz-Relation

Betrachten wir jetzt die Menge

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}^\nu \text{ mit } \nu := \nu_{3,m} = \binom{m+3}{3} - 1 = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1,$$

d.h. die Menge der Hyperflächen des Grades m im $\mathbb{P}^3$ und gleichzeitig die Plücker-Varietät

$$\prod \subseteq \mathbb{P}^5$$

der Geraden im $\mathbb{P}^3$. Wir wollen nach den Paaren (H, L) aus

$$\mathbb{P}^\nu \times \prod$$

fragen mit $L \subseteq H$, d.h. nach der Menge

$$I_m = \{(H,L) \in \mathbb{P}^\nu \times \prod \mid L \subseteq H\}$$

(f) Projektivität der Inzidenz-Relation

Die Menge I_m von (e) ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^\vee\times\prod$.

Beweis. Für $x\in\mathbb{P}^\vee$ bezeichne F_x ein homogenes Polynom dessen Koeffizienten proportional zu den Koordinaten von x sind. Wie bisher bezeichne $p(L) = (p_{ij}(L))$ ein Tupel von Plücker-Koordinaten der Geraden $L \in \Pi$. Dann gilt

$$L \subseteq V(F_x) \quad \Leftrightarrow F_x(p) = 0 \text{ für alle } p = (p_i) \text{ mit } p_i = \sum_j a_j p_{ij}(L) \text{ und } a_j\in k \quad \text{(vgl. (d))}$$

$$\Leftrightarrow F_x(\sum_j a_j p_{0j}(L), \dots , \sum_j a_j p_{3j}(L)) = 0 \text{ für alle } a_j\in k$$

Wir fassen jetzt den Ausdruck

$$F_x(\sum_j a_j p_{0j}, \dots , \sum_j a_j p_{3j})$$

als homogenes Polynom in den a_j auf. Dessen Koeffizienten $f_1(x,p),\dots,f_r(x,p)$ sind dann bi-homogene Polynome in den Koordinaten von x der durch F_x definierten Hyperfläche H und in den Plücker-Koordinaten p. Nach Konstruktion gilt

$$I_m = V(f_1(x,p),\dots,f_r(x,p)),$$

d.h. I ist eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraums.
QED.

(g) Dimension und Irreduzibilität der Inzidenz-Relation

Die Inzidenz-Relation

$$I_m \subseteq P^\vee\times\prod$$

von (e) der Geraden des $\mathbb{P}^3$ mit den Flächen des Grades m im $\mathbb{P}^3$ ist irreduzibel von der Dimension

$$\dim I_m = \frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3.$$

Beweis. Wir betrachten die beiden regulären Abbildungen

$$f: I_m \subseteq \mathbb{P}^\vee\times\prod \to \mathbb{P}^\vee , (H, L) \mapsto H,$$

$$g: I_m \subseteq \mathbb{P}^\vee\times\prod \to \prod , (H, L) \mapsto L.$$

Es gilt

$$g(I_m) = \prod,$$

denn durch jede Gerade geht mindestens eine (nicht-notwendig irreduzible) Hyperfläche des Grades m.[99]

Beschreiben wir die Fasern $g^{-1}(L)$. Dazu führen wir eine solche projektive Transformation aus, daß L die Gleichungen

$$L: u_0 = u_1 = 0$$

bekommt. Eine Hyperfläche mit der Gleichung

$$H: F = 0$$

[99] Die Gerade liegt in einer Hyperebene. Die m-te Potenz einer Gleichung dieser Hyperebene liefert die gesuchte Hyperfläche.

enthält genau dann die Gerade L, wenn eine Potenz von F im Ideal (u_0, u_1) von L liegt. Dieses Ideal ist aber ein Primideal. Deshalb gilt

$$L \subseteq H \Leftrightarrow F \in (u_0, u_1)$$

$$\Leftrightarrow F = u_0 G' + u_1 G'' \text{ mit } G', G'' \text{ homogen vom Grad } m-1$$

Die Formen F von dieser Gestalt bilden einen Vektorraum der Dimension[100]

$$\binom{m-1+3}{3} + \binom{m-1+3}{3} - \binom{m-2+3}{3}$$
$$= 2\cdot\frac{m(m+1)(m+2)}{6} - \frac{(m-1)m(m+1)}{6}$$
$$= \frac{m(m+1)(m+5)}{6}$$

Die Projektivierung dieses Vektorraums ist gerade die Faser $g^{-1}(L)$, d.h. $g^{-1}(L)$ ist ein projektiver Raum der Dimension

(1) $\dim g^{-1}(L) = \frac{m(m+1)(m+5)}{6} - 1.$

Insbesondere sind alle Fasern $g^{-1}(L)$ irreduzibel und haben dieselbe Dimension, d.h. I_m ist irreduzibel und hat die Dimension

$$\dim I_m = \dim g^{-1}(L) + \dim \prod = \frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3.$$

Man beachte, die Plücker-Varietät $\prod$ ist als Hyperfläche im $\mathbb{P}^5$ vierdimensional.
QED.

(h) Theorem 9 (Existenz von Flächen, die keine Geraden enthalten)

Für jedes $m > 3$ gibt es Flächen des Grades m im $\mathbb{P}^3$, welche keine Gerade enthalten.

Genauer: diese Flächen bilden eine offene dichte Teilmenge des $\mathbb{P}^\nu$ mit $\nu = \nu_{3,m}$.

Beweis. Betrachten wir die reguläre Abbildung

$$f: I_m \subseteq \mathbb{P}^\nu \times \prod \longrightarrow \mathbb{P}^\nu, \ (H, L) \mapsto H,$$

Das Bild dieser Abbildung ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{P}^\nu$. Es reicht zu zeigen, es handelt sich um eine echte Teilmenge. Dazu reicht es zu zeigen

$$\dim I_m < \dim P^\nu$$

Die Dimension der Inzidenz-Relation haben wir gerade berechnet (vgl. (g)). Die des Bildraums ist gleich

$$\nu_{3,m} = \binom{m+3}{3} - 1 = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$$

Es reicht also zu zeigen,

$$\frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3 < \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$$

Dies ist äquivalent zu

$$m(m+1)(m+5) < (m+1)(m+2)(m+3) - 24$$
$$\Leftrightarrow \quad (m+1)(m^2+5m - m^2 - 5m - 6) < -24$$
$$\Leftrightarrow \quad 24 < (m+1)\cdot 6$$

---

[100] vgl. 5.4.4 (b). Die Summe der ersten beiden Summanden zählt die Hyperflächen, die eine Vielfaches von $u_0 \bullet u_1$ sind doppelt. Die Dimension des Raums dieser Hyperflächen muß von dieser Summe abgezogen werden.

$\Leftrightarrow \quad 4 < m+1$

$\Leftrightarrow \quad 3 < m$

QED.

(i) Die Geraden auf den quadratischen Flächen (der Fall m = 2)

Im Fall von Flächen des Grades m = 2 im $\mathbb{P}^3$ gilt

$$\begin{aligned}\nu &= \binom{3+2}{3} - 1 \qquad \text{(nach 5.4.4 (b))}\\ &= \frac{5\bullet 4\bullet 3}{1\bullet 2\bullet 3}\\ &= 9,\end{aligned}$$

d.h. der Raum dieser Flächen ist 9-dimensional. Für die Inzidenz-Relation erhalten wir

$$\begin{aligned}\dim I_m &= \frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3 \qquad \text{(nach (g))}\\ &= \frac{2\bullet 3\bullet 7}{6} + 3\\ &= 10\end{aligned}$$

Die Fasern der Projektion

$$f: I_m \hookrightarrow P^\nu \times \prod \to P^\nu,\ (H, L) \mapsto H,$$

haben also eine Dimension ≥ 1. Das ist eine wohlbekannte Tatsache: auf jeder Fläche dritten Grades im Raum liegen unendlich viele Geraden.

Man kann leicht zeigen, über den Punkten die den irreduziblen Flächen entsprechen haben die Fasern eine Dimension = 1, über allen anderen Punkten eine Dimension = 2.

(j) Theorem 10 (Die Geraden auf den Flächen dritten Grades)

Auf jeder kubischen Fläche im $\mathbb{P}^3$ liegt mindestens eine Gerade. Die Menge der Flächen im Raum, die nur endlich viele Geraden enthalten ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{P}^{19}$.

Beweis. Betrachten wir die reguläre Abbildung

$$f: I_m \subseteq P^\nu \times \prod \to P^\nu,\ (H, L) \mapsto H,$$

im Fall m = 3. Es gilt

$$\begin{aligned}\dim I_m &= \frac{m(m+1)(m+5)}{6} + 3\\ &= \frac{3\bullet 4\bullet 8}{6} + 3\\ &= 19\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim P^\nu &= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1\\ &= \frac{4\bullet 5\bullet 6}{6} - 1\\ &= 19\end{aligned}$$

Die Fasern der Abbildung haben damit eine Dimension ≥ 0. Außerdem kann man sofort eine kubische Fläche angeben, die nur endlich viele Geraden enthält, zum Beispiel die mit der affinen Gleichung

$$H: T_1T_2T_3 - 1 = 0.$$

Im Endlichen enthält diese Fläche überhaupt keine Geraden: durch Einsetzen von

$$T_i = a_i t + b_i$$

in die Flächengleichung erhält man sofort eine Widerspruch (da Polynome in einer Variablen nur endlich viele Nullstellen besitzen). Die projektive Abschließung dieser Fläche hat die Gleichung

$$H : S_1 S_2 S_3 - S_0 = 0.$$

Die Fernhyperebe $S_0 = 0$ schneidet aus dieser Fläche drei Geraden heraus.

Damit ist die Faser $f^{-1}(H)$ endlich. Über einer offenen Teilmenge des Bildes sind die Fasern von f damit 0-dimensional. Für das Bild von f gilt also

$$\dim f(I_m) = \dim I_m = 19 = \dim \mathbb{P}^\nu,$$

d.h.

$$f(I_m) = \mathbb{P}^\nu,$$

d.h. jede kubische Fläche enthält mindestens eine Gerade. Über einer offenen Menge sind die Fasern endlich.

QED.

Bemerkung

Kubische Flächen, die unendlich viele Geraden enthalten existieren tatsächlich, z.B. die Kegel über ebenen Kurven dritten Grades (die gegeben sind durch eine kubische Gleichung, in der eine Variable nicht vorkommt).

Index

Inhalt